Modul Kuliah ke 10
Statistik

Perbedaan Mean dan Proporsi pada Dua Populasi

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

a. Memahami Perbedaan Mean dan Proporsi pada Dua Populasi
b. Membuat persamaan Hipotesis dengan (σ) Mean populasi diketahui.
c. Membuat persamaan Hipotesis dengan (σ) Mean populasi tidak diketahui
d. Mencari penyelesaian Perbedaan Mean dan Proporsi pada Dua Populasi

I. Konsep Perbedaan Mean dan Proporsi pada Dua Populasi

Dalam bab ini kita melanjutkan diskusi kita tentang inferensi statistik dengan menunjukkan interval estimasi dan tes hipotesis dapat dikembangkan untuk situasi yang melibatkan dua populasi dimana perbedaan mean antara dua populasi atau perbedaan proporsi antara dua populasi. Sebagai contoh kita mungkin ingin mengembangkan perkiraan interval perbedaan antara mean gaji awal untuk populasi laki-laki dan mean gaji awal untuk populasi wanita dengan melakukan tes hipotesis atau misalnya apakah ada perbedaan antara proporsi bagian yang rusak dalam populasi yang diproduksi oleh pemasok A dan proporsi bagian yang rusak dalam populasi yang diproduksi oleh pemasok B. Kita mulai pembahasan mengenai statistik perbedaan antara dua populasi dengan menunjukkan pengembangan estimasi interval dan menghubungkannya dengan tes hipotesis mengenai perbedaan mean antara dua populasi dimana standar deviasi dari populasinya diketahui.

II. Perbedaan Mean Antara Dua Populasi dengan σ_1 dan σ_2 Diketahui

Seperti yang kita ketahui bahwa μ_1 menunjukkan mean dari populasi 1 dan μ_2 menunjukkan mean dari populasi 2, kita dapat menentukan perbedaan mean antara dua populasi dengan mengurangkan kedua mean tersebut: $\mu_1 - \mu_2$. Untuk membuat kesimpulan mengenai perbedaan ini, kita dapat memilih sampel acak sederhana n_1 unit dari populasi 1 dan sampel acak sederhana kedua unit n_2 dari populasi 2. Dua sample yang diambil secara terpisah dan independen dapat dikatakan sebagai independent simple random sample dengan asumsi standar deviasi populasi dari kedua populasi σ_1 dan σ_2 diketahui.

a. Estimasi Interval dari $\mu_1 - \mu_2$

   Untuk dapat mengetahui estimasi interval perbedaan dari $\mu_1 - \mu_2$ ini, dapat kita lakukan dengan mengambil data observasi. Dimana :

   μ_1 adalah mean populasi pada sample 1
   μ_2 adalah mean populasi pada sample 2

Untuk mencari perbedaan antara mean dari dua populasi adalah dengan mengurangkan kedua mean populasi tersebut yaitu μ_1 - μ_2.

Untuk mengestimasi μ_1 - μ_2, kita dapat mengambil sample simple random dari n_1 pada populasi 1 dan sample simple random dari n_2 pada populasi 2. Kemudian kita dapat menghitung mean kedua sample tersebut. Dimana:

$\bar{x}_1$ = mean sample simple random pada n_1

$\bar{x}_2$ = mean sample simple random pada n_2

Dari mean sample tersebut kita dapat mencari poin estimasi perbedaan mean antara dua populasi dengan persamaan berikut:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Untuk mencari standar error dari $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ adalah :

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Dari persamaan di atas kita dapat mencari margin error dengan persamaan berikut:

$$\text{Margin error} = z_{\alpha/2}\ \sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Dari persamaan di atas kita dapat mencari interval dengan persamaan berikut

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm$ Margin Error

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Dimana: (1- α) = koefisien confidence

Contoh 1

Seorang pimpinan suatu perusahaan ingin mengetahui analisis perbedaan dari data demografi customer dua sample sebelumnya dengan standar deviasi pada populasi pertama σ_1 adalah 9 tahun dan standar deviasi populasi kedua σ_2 adalah 10 tahun. Data sample yang dikumpulkan secara simple random diketahui sample size n_1 = 36 dan n_2 = 49, kemudian sample mean $\bar{x}_1$ = 40 tahun dan sample mean $\bar{x}_2$ = 35 tahun dengan confidence 95%.

Dari kasus tersebut hitunglah estimasi interval perbedaan dari dua populasi tersebut!

Jawaban

Diketahui:

$\bar{x}_1 = 40$	$n_1 = 36$
$\bar{x}_2 = 35$	$n_2 = 49$
$\sigma_1 = 9$	Confidence 95% → $\alpha = 0{,}05$ → $\alpha/2 = 0{,}025$
$\sigma_2 = 10$	$z\alpha/2 = z0{,}025$ → areanya 1-0,025= 0,975, maka z = 1,96

Untuk mencari interval adalah sebagai berikut:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$40 - 35 \pm z_{0,025}\sqrt{\frac{9^2}{36} + \frac{10^2}{49}}$$

$$40 - 35 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{81}{36} + \frac{100}{49}}$$

$$40 - 35 \pm 1{,}96\sqrt{2{,}25 + 2{,}04}$$

$$5 \pm 1{,}96(2{,}07)$$

$$5 \pm 4{,}06$$

Interval = 5 - 4,06 sampai 5 + 4,06
Interval = 0,94 sampai 9,06

b. Tes Hipotesis untuk $\mu_1 - \mu_2$

Kita menggunakan D_0 untuk menguji hipotesis perbedaan antara $\mu_1 - \mu_2$ terbagi menjadi satu sisi dan dua sisi seperti berikut:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$
Sisi kiri	Sisi kanan	Dua sisi

Rumus uji hipotesis perbedaan antara m1 - m2 dan σ1, σ2 diketahui dan adalah:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Contoh 2

Data history suatu bisnis diketahui bahwa standar deviasi populasi dari dua populasi adalah σ_1=10 dan σ_2 = 10, dengan level signifikasi α = 0,05. Data merupakan independen simple random dengan n_1 =30 pada populasi pertama dan n_2 = 40 pada populasi kedua. Kemudian sample mean pada populasi $\bar{x}_1$ = 82 dan populasi kedua $\bar{x}_2$ = 78. Persamaan hipotesisnya adalah sebagai berikut:

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Ujilah hipotesis kasus tersebut apakah tidak ada perbedaan mean antara kedua populasi di atas!

Jawaban

a. Tes statistik
Pada tahapan ini akan dihitung tes statistiknya menggunakan rumus tes statistik berikut:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$z = \frac{(82 - 78) - 0}{\sqrt{\frac{10^2}{30} + \frac{10^2}{40}}}$$

z = 1,66

b. Nila p (p-value)
Nilai p (p-value) adalah nilai probabilitas dari z = 1,66 untuk area sebelah kanan pada probabilitas distribusi normal.
Untuk mencari besarnya nilai probabilitas distribusi normal atau area sebelah kanan menggunakan tabel distribusi normal komulatif dengan z = 1,66, maka hasil yang diperoleh luas areanya adalah 0,9515. Area tersebut adalah luas dari titik z ke arah kiri, sedangkan p-value adalah luas area dari titik z kekanan, dan baru setengah dari nilai p-value :
1/2(p-value) = 1- 0,9515 = 0.0485, maka nilai p-value adalah:
p-value = 2(0,0485) = 0,097

c. Pengujian Nila p (p-value)
Untuk pengujian p-value ini, kita akan membandingkan nilai p-value ini dengan nilai *significance* α yang telah ditentukan sebelumnya. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari uji p-value dengan nilai sebesar 0,097 menggunakan aturan uji p-value terhadap nilai α adalah:

- Tolak H_0 jika p-value $\leq \alpha$

- Apakah nilai p-value ≤ α
- Apakah nilai 0,097 ≤ 0,05
- Uji p-value tersebut menghasilkan pernyataan yang salah, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho diterima dan pernyataan Ha ditolak. Hasil yang diterima H_0 artinya tidak ada perbedaan antara mean populasi pertama dan populasi kedua.

d. Pengujian pendekatan kritikal
Untuk pengujian pendekatan kritikal ini, kita akan membandingkan nilai z hasil dari uji statistik ini dengan nilai z_α hasil dari *significance* α yang telah ditentukan pada awal kasus. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari z_α adalah sebagai berikut:

α sebesar 0,05, maka α/2 adalah 0,025. Karena hasil z hasil uji statistik positif maka $z_{\alpha/2}$ yang akan dibandingkan adalah yang sebelah kanan. Area yang diperoleh yaitu:

area = 1- 0,025 = 0.975
area = 0,975, maka $z_{\alpha/2}$ adalah 1,96, hasil tersebut diperoleh dari tabel probabiltas distribusi normal seperti gambar berikut:

Tabel 1. Distribusi normal komulatif

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

Dari tabel distribusi normal tersebut diperoleh bahwa nilai dari zα adalah 1,96. Pada tes statistik didapatkan nilai z sebesar 1,66, kemudian nilai dari zα adalah 1,96, maka kita dapat menguji nilai z dibandingkan dengan zα menggunakan aturan pengujian pendekatan kritikal adalah sebagai berikut:

- Tolak H_0 jika $z \geq z_{\alpha/2}$
- Apakah nilai $z \geq z_{\alpha/2}$
- Apakah nilai $1{,}66 \geq 1{,}96$
- Uji pendekatan kritikal tersebut menghasilkan pernyataan yang salah, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho diterima dan Ha ditolak, artinya tidak ada perbedaan mean antara kedua populasi tersebut.

e. Penarikan kesimpulan
   Hasil pengujian hipotesis menggunakan dua pendekatan yaitu pendekan uji p-value dan uji pendekatan kritikal, maka kesimpulannya adalah:
   - Uji p-value
     - Apakah nilai p-value $\leq \alpha$
     - Apakah nilai $0{,}097 \leq 0{,}05$ → pernyataan yang salah
     - Kesimpulan Ho Diterima
   - Ujin Kritikal
     - Tolak H_0 jika $z \geq z_{\alpha/2}$
     - Apakah nilai $z \geq z_{\alpha/2}$
     - Apakah nilai $1{,}66 \geq 1{,}96$ → pernyataan yang salah
     - Kesimpulan Ho Diterima
   - Kesimpulan dari kedua uji menunjukkan hasil yang sama yaitu Ho diterima, berarti kedua hasil uji ini konsisten, maka secara keseluruhan pengujian hipotesis dengan hasilnya adalah Ho diterima.
     Hal ini menjawab kebenaran pernyataan dugaan awalnya menyatakan bahwa mean dari kedua populasi tersebut adalah tidak ada perbedaan atau sama.

   Untuk kasus satu sisi langkah pengujiannya sama dengan materi sebelumnya yaitu pada pengujian hipotesisi.

III. Perbedaan Mean Antara Dua Populasi dengan σ_1 dan σ_2 Tidak Diketahui

Pada bagian ini kami membahas mengenai perbedaan mean antara keduanya populasi pada kasus ketika dua standar deviasi populasi, σ_1 dan σ_2, adalah tidak diketahui. Dalam hal ini, kita akan menggunakan standar deviasi sampel, s_1 dan s_2, untuk mengestimasi standar deviasi populasi dengan σ_1 dan σ_2 yang tidak diketahui.

Ketika kita menggunakan standar deviasi sampel untuk estimasi interval dan prosedur pengujian hipotesis akan didasarkan pada tabel distribusi t.

a. Estimasi Interval dari $\mu_1 - \mu_2$

   Untuk dapat mengetahui estimasi interval perbedaan dari $\mu_1 - \mu_2$ ini dengan σ_1 dan σ_2 tidak diketahui, dapat kita lakukan dengan mengambil data observasi. Dimana :

μ_1 adalah mean populasi pada sample 1
μ_2 adalah mean populasi pada sample 2

Untuk mencari perbedaan antara mean dari dua populasi adalah dengan mengurangkan kedua mean populasi tersebut yaitu $\mu_1 - \mu_2$.

Untuk mengestimasi $\mu_1 - \mu_2$, kita dapat mengambil sample simple random dari n_1 pada populasi 1 dan sample simple random dari n_2 pada populasi 2. Kemudian kita dapat menghitung mean kedua sample tersebut. Dimana:

$\bar{x}_1$ = mean sample simple random pada n_1

$\bar{x}_2$ = mean sample simple random pada n_2

Dari mean sample tersebut kita dapat mencari poin estimasi perbedaan mean antara dua populasi dengan persamaan berikut:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Untuk mencari standar error dari $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ adalah :

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Dari persamaan di atas kita dapat mencari margin error dengan persamaan berikut:

$$\text{Margin error} = t_{\alpha/2}\ s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Dari persamaan di atas kita dapat mencari interval dengan persamaan berikut

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm$ Margin Error

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Dimana: $(1-\alpha)$ = koefisien confidence

Dan untuk mencari df dapat dilihat seperti berikut:

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Ada juga referensi lain untuk mencari df = $(n_1+n_2)-1$

b. Tes Hipotesis untuk m1 - m2

Kita menggunakan D_0 untuk menguji hipotesis perbedaan antara $\mu_1 - \mu_2$ terbagi menjadi satu sisi dan dua sisi seperti berikut:

Sisi kiri	Sisi kanan	Dua sisi
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq D_0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq D_0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = D_0$
$H_a: \mu_1 - \mu_2 < D_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 > D_0$	$H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

Rumus uji hipotesis perbedaan antara $\mu 1 - \mu 2$ dan $\sigma 1$, $\sigma 2$ tidak diketahui dan adalah:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Df untuk distribusi probabiliti t mengunakan rumus di atas.

Contoh 3

Sebuah perusahaan akan mengganti penggunaan teknologi lama dengan software baru untuk mengurangi waktu proses agar menjadi lebih efisien. Data durasi waktu antara teknologi lama dan software baru dapat dilihat pada gambar berikut:

No	Teknologi lama	Software baru
1	300	274
2	280	220
3	344	308
4	385	336
5	372	198
6	360	300
7	288	315
8	321	258
9	376	318
10	290	310
11	301	332
12	283	263
Sample size	n_1 =12	n_2 = 12
Sample mean	$\bar{x}_1$ = 325 jam	$\bar{x}_2$ = 286 jam
Standar deviasi sample	s_1 = 40	s_2 = 44

Persamaan hipotesisnya adalah sebagai berikut:

H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leq D_0$
H_a: $\mu_1 - \mu_2 > D_0$

Carilaj hasil uji hipotesisnya dan apa kesimpulannya dengan α sebesar 0,05 !

Jawaban

Untuk melakukan uji hipotesis pada kasus tersebut dapat kita ikuti tahapan berikut ini:

a. Pembuatan persamaan hipotesis
b. Tes statistik

Pada tahapan ini akan dihitung tes statistiknya menggunakan rumus tes statistik berikut:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$t = \frac{(325 - 286) - 0}{\sqrt{\frac{40^2}{12} + \frac{44^2}{12}}}$$

t = 2,27

Untuk mencari df menggunakan rumus di atas sebagai berikut:

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

$$df = \frac{\left(\frac{40^2}{12} + \frac{44^2}{12}\right)^2}{\frac{1}{12 - 1}\left(\frac{40^2}{12}\right)^2 + \frac{1}{12 - 1}\left(\frac{44^2}{12}\right)^2}$$

df = 21,8

c. Nila p (p-value)

Nilai p (p-value) adalah nilai probabilitas dari t = 2,27 positif maka berada pada area sebelah kanan pada probabilitas distribusi t.

Untuk mencari besarnya nilai t distribusi normal menggunakan tabel t distribusi normal dengan df = 21,8 dibulatkan (22), maka hasil yang diperoleh p-value adalah 0,025 – 0,01. Tabel distribusi probabilitas t dengan derajat ketinggian (df = 22) dapat dilihat pada tabel berikut:

Area in Upper Tail	.20	.10	.05	.025	.01	.005
t-Value (21 *df*)	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831

$t = 2.27$

d. Pengujian Nila p (p-value)
Untuk pengujian p-value ini, kita akan membandingkan nilai p-value ini dengan nilai *significance* α yang telah ditentukan sebelumnya. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari uji p-value dengan nilai sebesar 0,025 – 0,01 menggunakan aturan uji p-value terhadap nilai α adalah:

- Tolak H_0 jika p-value ≤ α
- Apakah nilai p-value ≤ α
- Apakah nilai 0,025 --- 0,01 ≤ 0,05
- Uji p-value tersebut menghasilkan pernyataan yang benar, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho ditolak.

e. Pengujian pendekatan kritikal
Untuk pengujian pendekatan kritikal ini, kita akan membandingkan nilai t hasil dari uji statistik ini dengan nilai t_α hasil dari *significance* α yang telah ditentukan pada awal kasus. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari t_α adalah sebagai berikut:

α sebesar 0,05, maka t_α diperoleh dari tabel probabiltas t distribusi normal seperti gambar berikut:

Area in Upper Tail	.20	.10	.05	.025	.01	.005
t-Value (21 *df*)	0.859	1.323	$\boxed{1.721}$	2.080	2.518	2.831

Dari tabel distribusi t tersebut diperoleh bahwa nilai dari t_α adalah 1,721. Pada tes statistik didapatkan nilai t sebesar 2,27, kemudian nilai dari t_α adalah 1,721, maka kita dapat menguji nilai t dibandingkan dengan t_α menggunakan aturan pengujian pendekatan kritikal adalah sebagai berikut:

- Tolak H_0 jika $t \geq t_\alpha$
- Apakah nilai $t \geq t_\alpha$
- Apakah nilai $2,27 \geq 1,721$
- Uji pendekatan kritikal tersebut menghasilkan pernyataan yang benar, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho ditolak.

f. Penarikan kesimpulan
Hasil pengujian hipotesis menggunakan dua pendekatan yaitu pendekan uji p-value dan uji pendekatan kritikal, maka kesimpulannya adalah:

- Uji p-value
    - Apakah nilai p-value ≤ α
    - Apakah nilai 0,025 --- 0,01 ≤ 0,05 → pernyataan yang benar
    - Kesimpulan H_0 Ditolak
- Ujin Kritikal
    - Tolak H_0 jika $t \geq t_\alpha$
    - Apakah nilai $t \geq t_\alpha$
    - Apakah nilai 2,27 ≥ 1,721 → pernyataan yang benar
    - Kesimpulan H_0 Ditolak
- Kesimpulan dari kedua uji menunjukkan hasil yang sama yaitu H_0 ditolak, berarti kedua hasil uji ini konsisten, maka secara keseluruhan pengujian hipotesis dengan hasilnya adalah H_0 ditolak.
  Hal ini menjawab kebenaran pernyataan dugaan awalnya menyatakan bahwa jumlah μ_1 lebih kecil dari μ_2 adalah ditolak, Artinya mean pada teknologi lama waktunya lebih besar dari software baru dengan toleransi error signifikasi α sebesar 0,05.

Untuk kasus satu sisi kiri dan dua sisi langkah pengujiannya sama dengan materi sebelumnya yaitu seperti pada pengujian hipotesisi.

IV. Perbedaan Mean Antara Dua Populasi dengan Matched Samples

Metode matched sample menggunakan data sample dari kedua popuplasi yang menguji angka perbedaanya saja dari kedua sample tersebut. Dari dua data yang diambil dari sample pertama dari populasi pertama dan data yang diambil dari sample kedua dari populasi kedua dijadikan satu data dengan melihat selisih atau perbedaan dari kedua data sample tersebut, maka pengujian hipotesisnya menggunakan distribusi probabilitas t.
Tes statisrik untuk uji hipotesis dengan matched sample adalah sebagai berikut:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}}$$

Contoh 4

Sebuah perusahaan akan membandingkan perbedaan proses produksi antara metode 1 dengan metode 2 yang akan diuji coba pada 6 pekerjanya. Data yang diperoleh seperti tabel berikut:

Pekerja	Metode 1 (menit)	Metode 2 (menit)	Perbedaan (d_i)
1	6	5,4	0,6
2	5	5,2	-0.2
3	7	6,5	0,5
4	6,2	5,9	0,3
5	6	6	0
6	6,4	5,8	0,6

Persamaan hipotesisnya adalah sebagai berikut:

H_0: $\mu d = 0$
H_a: $\mu d \neq 0$

Carilah hasil uji hipotesisnya dengan $\alpha = 0{,}05$!

Jawaban

a. Untuk mencari mead dari $\bar{d}$ adalah sebagai berikut:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3$$

b. Standar deviasi dari d (S_d) adalah sebagai berikut:

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1} = \sqrt{\frac{0{,}56}{5}} = 0{,}335}$$

c. Tes statistik untuk matched sample adalah sebagai berikut:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}}$$

$$t = \frac{0{,}3 - 0}{0{,}335 / \sqrt{6}} = 2{,}20$$

d. Nila p (p-value)
Nilai p (p-value) adalah nilai probabilitas dari t = 2,2 lebih besar dari 0 maka berada pada area sebelah kanan pada probabilitas distribusi t.
Untuk mencari besarnya nilai t distribusi normal menggunakan tabel t distribusi normal dengan df = 6-1 = 5, maka hasil yang diperoleh p-value adalah 0,05 – 0,025. Tabel distribusi probabilitas t dengan derajat ketinggian (df = 5) dapat dilihat pada tabel berikut:

Area in Upper Tail	**.20**	**.10**	**.05**	**.025**	**.01**	**.005**
***t*-Value (5 *df*)**	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032

$t = 2.20$

e. Pengujian Nila p (p-value)
Untuk pengujian p-value ini, kita akan membandingkan nilai p-value ini dengan nilai *significance* α yang telah ditentukan sebelumnya. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari uji p-value dengan nilai sebesar 0,05 – 0,025 menggunakan aturan uji p-value terhadap nilai α adalah:

- Tolak H_0 jika p-value ≤ α
- Apakah nilai p-value ≤ α
- Apakah nilai 0,05 --- 0,025 ≤ 0,05
- Uji p-value tersebut menghasilkan pernyataan yang benar, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho ditolak.

f. Pengujian pendekatan kritikal
Untuk pengujian pendekatan kritikal ini, kita akan membandingkan nilai t hasil dari uji statistik ini dengan nilai t_α hasil dari *significance* α yang telah ditentukan pada awal kasus. Pada kasus di atas disebutkan bahwa batas nilai toleransinya α sebesar 0,05, maka hasil dari t_α adalah sebagai berikut:

α sebesar 0,05, maka t_α diperoleh dari tabel probabiltas t distribusi normal seperti gambar berikut:

Area in Upper Tail	**.20**	**.10**	**.05**	**.025**	**.01**	**.005**
***t*-Value (5 *df*)**	0.920	1.476	$\boxed{2.015}$	2.571	3.365	4.032

Dari tabel distribusi t tersebut diperoleh bahwa nilai dari t_α adalah 2,015. Pada tes statistik didapatkan nilai t sebesar 2,2, kemudian nilai dari t_α adalah 2,015, maka kita dapat menguji nilai t dibandingkan dengan t_α menggunakan aturan pengujian pendekatan kritikal adalah sebagai berikut:

- Tolak H_0 jika $t \geq t_\alpha$
- Apakah nilai $t \geq t_\alpha$
- Apakah nilai 2,2 ≥ 2,015
- Uji pendekatan kritikal tersebut menghasilkan pernyataan yang benar, maka hasil dari pernyataan tersebut kesimpulannya adalah Ho ditolak.

g. Penarikan kesimpulan
Hasil pengujian hipotesis menggunakan dua pendekatan yaitu pendekan uji p-value dan uji pendekatan kritikal, maka kesimpulannya adalah:

- Uji p-value
  - Apakah nilai p-value ≤ α
  - Apakah nilai 0,05 --- 0,025 ≤ 0,05 → pernyataan yang benar
  - Kesimpulan H_0 Ditolak
- Ujin Kritikal
  - Tolak H_0 jika $t \geq t_\alpha$
  - Apakah nilai $t \geq t_\alpha$

- Apakah nilai $2{,}2 \geq 2{,}015$ → pernyataan yang benar
- Kesimpulan H_0 Ditolak

- Kesimpulan dari kedua uji menunjukkan hasil yang sama yaitu H_0 ditolak, berarti kedua hasil uji ini konsisten, maka secara keseluruhan pengujian hipotesis dengan hasilnya adalah H_0 ditolak.

Daftar Pustaka

Statistics for Business and Economics (13e)” Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran 2017, Cengage Learning