Modul Kuliah ke 10
Statistik

Inferensi Varian pada Populasi

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
a. Memahami inferensi varian pada populasi
b. Membuat persamaan hipotesis inferensi varian pada populasi
c. Mencari kesimpulan hipotesis inferensi varian pada populasi

I. Inference Varian pada Populasi

Pada bab ini kita membahas dan diskusi yang melibatkan kesimpulan tentang variasi populasi.

Rumus untuk mencari varian dari sample adalah:

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Varian pada sample merupakan poin estimasi varian pada populasi σ^2. Varian sample dapat digunakan sebagai dasar untuk mencari inferensi pada varian populasi. Dsitribusi sampling dapat membantu dalam mencari inferensi varian pada populasi dengan rumus sebagai berikut:

Distribusi sampling = $X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

Dimana:

n adalah jumlah sample

(n – 1) adalah derajat ketinggian (df)

s^2 adalah standar deviasi sample

σ^2 adalah standar deviasi populasi

II. Estimasi Interval pada Inference Varian Populasi

Rumus distribusi sampling di atas dapat kita gunakan untuk mencari interval pada inferensi varian populasi σ^2. Persamaan distribusi sampling di atas mengikuti sebuah distribusi chi-square dengan derajat ketinggian (degrees of freedom) adalah ((n – 1) dapat digunakan untuk mengestimasi interval varian populasi.

Rumus estimasi interval pada varian populasi adalah sebagai berikut:

$$\frac{(n-1)s^2}{X^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{X^2_{(1-\alpha/2)}}$$

Dimana:

X^2 adalah nilai dari tabel distribusi chi-square dengan df (n – 1)

1 - α adalah koefisien confidence

Contoh 1

Seorang supervisor perusahaan ingin mengetahui analisis perkiraan varian populasi untuk proses pengisian bahan baku produksi. Jumlah sample yang telah diambil adalah 20 buah dan varian sample dari data tersebut adalah s^2 = 0,0025. Dengan α = 0,05.

Hitunglah estimasi interval populasinya!

Jawaban

Diketahui :

α = 0,05, maka α/2 = 0,025 dan (1- α/2) = (1–0,025) = 0,975.

df = 20-1 = 19

Untuk mencari interval varian populasi menggunakan rumus di atas adalah:

$$\frac{(n-1)s^2}{X^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{X^2_{(1-\alpha/2)}}$$

$$\frac{(20-1)0{,}0025}{X^2_{0{,}025}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(20-1)0{,}0025}{X^2_{0{,}0975}}$$

$$\frac{0{,}0475}{X^2_{0{,}025}} \leq \sigma^2 \leq \frac{0{,}0475}{X^2_{0{,}0975}}$$

Untuk mencari nilai dari $X^2_{0{,}025}$ dan $X^2_{0{,}0975}$ kita dapat menggunakan tabel chi-square dengan df = 19, maka hasilnya adalah seperti berikut:

$X^2_{0{,}025}$ = 32,852

$X^2_{0{,}0975}$ = 8,907

Tabel chi-square dapat dilihat di bawah ini

Tabel 1. Chi-square

Degrees of Freedom	Area in Upper Tail .99	.975	.95	.90	.10	.05	.025
1	.000	.001	.004	.016	2.706	3.841	5.024
2	.020	.051	.103	.211	4.605	5.991	7.378
3	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348
4	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	.554	.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832
6	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013
8	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337
13	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.736
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526
19	7.633	$\boxed{8.907}$	10.117	11.651	27.204	30.144	$\boxed{32.852}$

Nila dari tabel tersebut kita masukkan pada rumus di atas maka hasilnya adalah:

$$\frac{0{,}0475}{X^2_{0{,}025}} \leq \sigma^2 \leq \frac{0{,}0475}{X^2_{0{,}0975}}$$

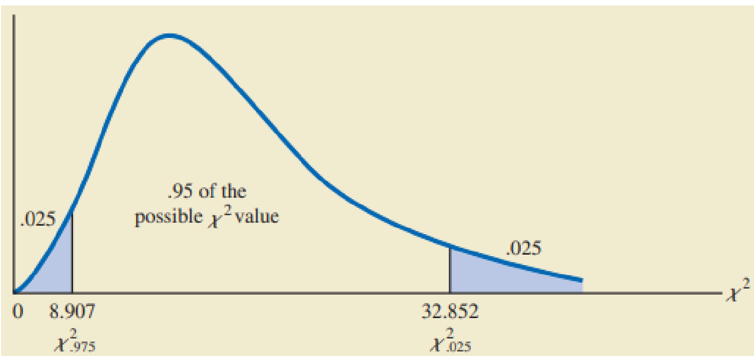
$$\frac{0{,}0475}{32{,}852} \leq \sigma^2 \leq \frac{0{,}0475}{8{,}907}$$

$$0{,}0014 \leq \sigma^2 \leq 0{,}0053$$

Untuk menghitung estimasi interval standar deviasinya adalah:

$$0{,}0380 \leq \sigma \leq 0{,}0730$$

Gambar kasus ini dapat dilihat seperti gambar berikut:



Gambar 1. Grafik chi-square pada kasus 1

III. Uji Hipotesis pada Inference Varian Populasi

Untuk menguji hipotesis pada inferensi varian populasi dapat mengunakan nilai dari σ_0^2. Pada kondisi seperti berikut:

Sisi kiri	Sisi kanan	Dua sisi
H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_a: $\sigma^2 < \sigma_0^2$	H_a: $\sigma^2 > \sigma_0^2$	H_a: $\sigma^2{}_2 \neq \sigma_0^2$

Rumus uji hipotesis pada inferensi varian populasi adalah:

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Dimana :

X^2 adalah distribusi chi-square

n – 1 degrees of freedom

Contoh 2

Sebuah perusahaan bis kota ingin membuat penetapan waktu kedatangan bis pada halte dengan variaasi yang rendah. Perusahaan menetapkan standar varian waktu kedatangan tidak lebih dari 4 menit. Jumlah sample waktu kedatangan bis pada halte yang telah diambil sebanyak 24 bis dengan sample varian $s^2 = 4{,}9$ serta $\alpha = 0{,}05$. Hipotesi yang telah dirumuskan pada kasus tersebut untuk menentukan apakah waktu kedatangan melebihi standar waktu yang ditetapkan seperti berikut:

H_0: $\sigma^2 \leq 4$

H_a: $\sigma^2 > 4$

Hitunglah pengujian hipotesis tersebut dan apa kesimpulannya!

Jawaban

a. Untuk mencari tes statistik dengan rumus di atas adalah sebagai berikut:

$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

$$X^2 = \frac{(24-1)4{,}9}{4} = 28{,}18$$

Df = 24 – 1 = 23

b. Untuk mencari dan menguji nilai p-value kasus di atas adalah sebagai berikut:

X^2 = 28,18, dengan df = 23, maka nilai p-value dengan melihat pada tabel chi-square hasilnya adalah seperti berikut:

Area in Upper Tail	**.10**	**.05**	**.025**	**.01**
χ^2 **Value (23** ***df*****)**	32.007	35.172	38.076	41.638

$\chi^2 = 28.18$

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai p-valua lebih besar dari 0,1

p-value > 0,1

Nilai α = 0,05

Kita bandingkan nilai p-value dengan nilai α, maka hasilnya adalah:

Tolak H_0, jika p-value $\leq \alpha$
Apakah p-value $\leq \alpha$
Apakah nilai diatas 0,10 $\leq$ 0,05

Hasil pernyataan tersebut adalah pernyataan yang salah, maka kesimpulannya:
H_0 diterima, artinya waktu kedatangan bis pada halte lebih kecil dari 4 menit.

c. Untuk pengujian pendekatan kritikal kasus di atas adalah sebagai berikut:

Nilai α = 0,05, dengan df = 23, maka untuk mencari X_α^2 hasil pada tabel chi-square adalah sebagi berikut:

Area in Upper Tail	**.10**	**.05**	**.025**	**.01**
χ^2 **Value (23** ***df*****)**	32.007	$\boxed{35.172}$	38.076	41.638

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai X_α^2 = 35,172

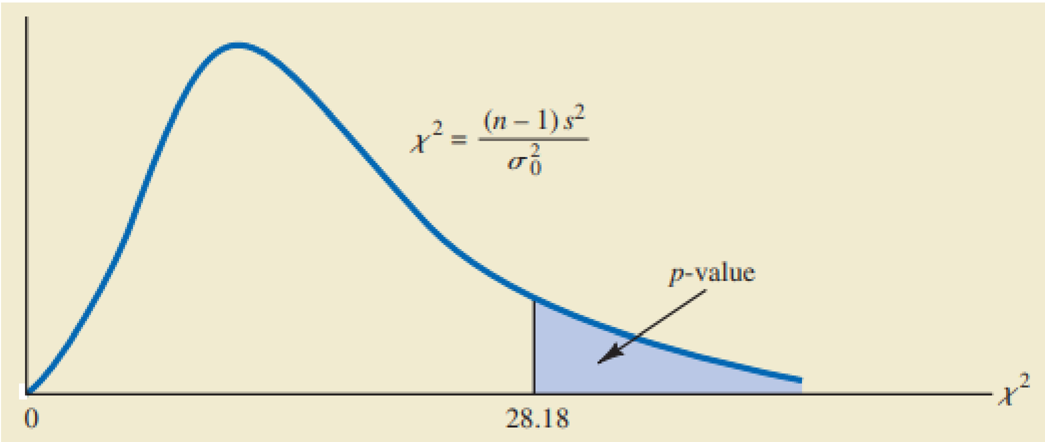
Kita bandingkan nilai dari X^2 dengan X_α^2, maka hasilnya adalah sebagai berikut:

Tolak H_0, jika $X^2 \geq X_\alpha^2$
Apakah $X^2 \geq X_\alpha^2$
Apakah nilai diatas 28,18 $\geq$ 35,172

Hasil pernyataan tersebut adalah pernyataan yang salah, maka kesimpulannya:
H_0 diterima, artinya waktu kedatangan bis pada halte lebih kecil dari 4 menit.

d. Hasil kesimpulan dari kasus di atas adalah sebagai berikut:
   - Hasil uji p-value $\geq \alpha$, maka H_0 diterima
   - Hasil uji kritikal $X^2 \leq X^2_{\alpha}$, maka H_0 diterima
   - Kedua uji tersebut sama dan konsisten, maka kesimpulannya adalah H_0 diterima.

Gambar kasus tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Grafik kasus kedatangan bis

Kesimpulan langkah analisis inferensi varian populasi pada sisi kiri, sisi kanan dan dua sisi dapat dilihat pada gambar berikut:

	Lower Tail Test	**Upper Tail Test**	**Two-Tailed Test**
Hypotheses	$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
Test Statistic	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
Rejection Rule: *p*-value Approach	Reject H_0 if *p*-value $\leq \alpha$	Reject H_0 if *p*-value $\leq \alpha$	Reject H_0 if *p*-value $\leq \alpha$
Rejection Rule: Critical Value Approach	Reject H_0 if $\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha)}$	Reject H_0 if $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}$	Reject H_0 if $\chi^2 \leq \chi^2_{(1-\alpha/2)}$ or if $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}$

Gambar 3. Langkah analisis inferensi varian populasi

IV. Inferences Mengenai Varian Two Population

Dalam beberapa aplikasi statistik, kita mungkin ingin membandingkan varian dalam kualitas produk yang dihasilkan dari dua proses produksi yang berbeda, varian dalam waktu perakitan untuk dua metode perakitan, atau variasi suhu untuk dua perangkat pemanas. dalam membuat perbandingan tentang dua varian populasi, kita akan menggunakan data yang dikumpulkan dari dua sampel random independen, satu dari populasi 1 dan satu lagi dari populasi 2.

Dari kedua varian sample s_1^2 dan s_2^2 akan menjadi dasar untuk mencari inferensi pada varian dua populasi σ_1^2 dan σ_2^2. Dimana varian dari dua populasi yang normal adalah sama (σ_1^2 = σ_2^2.). Distribusi sampling dari rasio pada varian dua sample adalah:

s_1^2 / s_2^2 dimana σ_1^2 = σ_2^2

Sample random sederhana independen dari ukuran n1 dan n2 yang terpilih dari kedua populasi normal sam dengan varian, maka distribusi sampling adalah:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Dimana:

Penggunaan distribusi F pada tabel F dengan df numerator (pembilang) = n_1-1

Dan df denumerator (penyebut) adalah n_2-1.

s_1^2 adalah varian sample pada sample random n_1 dari populasi 1

s_2^2 adalah varian sample pada sample random n_2 dari populasi 2

Distribusi F dapat digunakan untuk melakukan uji hipotesis mengenai varian dari dua populasi. kita mulai dengan uji kesamaan dua varian populasi. hipotesis dinyatakan sebagai berikut

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Tes statistiknya :

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Diama:

Tes teesebut menunjukkan populasi dengan varian sample besar sebagai populasi 1.

Tes statistik F distribusi dengan df numerator = (n_1 - 1) dan df denumerator = n_2 -1

Contoh 3

Dari sample 26 waktu kedatangan pada layanan Milbank dengan varian sample 48 dan sample 16 waktu kedatangan untuk layanan GulfPark dengan varian sample 20. Dikarenakan sample pada Milbank menyediakan varian dari sample yang besar, kita dapat menentukan Milbank sebagai populasi 1. Dari kasus tersebut carilah tes statistiknya dengan α = 0,10 dan apa hasil dari kesimpulannya hipotesis dari kesamaan varian populasi tersebur!

Jawaban

Diketahui:

$n_1 = 26$ $n_2 = 16$

$s_1^2 = 48$ $s_2^2 = 20$

a. Hipotesisnya adalah:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_a: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

b. Untuk mencari tes statistik dengan rumus di atas adalah sebagai berikut:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{48}{20} = 2{,}40$$

Df numerator = 26 – 1 = 25

Df denumerator = 16 – 1 = 15

c. Untuk mencari dan menguji nilai p-value kasus di atas adalah sebagai berikut:

F = 2,40 dengan df numerator = 25 dan df denumerator = 15, maka nilai p-value dengan melihat pada tabel F hasilnya adalah seperti berikut:

Denominator Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom						
		7	8	9	10	15	20	25
15	.10	2.16	2.12	2.09	2.06	1.97	1.92	1.89
	.05	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.28
	.025	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.69
	.01	4.14	4.00	3.89	3.80	3.52	3.37	3.28

F=2,40

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai p-valua dari 0,05 sampai 0,025
Karena menggunakan two tailed, maka:
p-value = 2 (0,05 -- 0,025) = 0,1 – 0,05
Nilai α = 0,1

Kita bandingkan nilai p-value dengan nilai α, maka hasilnya adalah:

Tolak H_0, jika p-value ≤ α
Apakah p-value ≤ α
Apakah 0,10 – 0,05 ≤ 0,10

Hasil pernyataan tersebut adalah pernyataan yang benar, maka kesimpulannya:
H_0 ditolak, artinya varian waktu kedatangan populasi 1 tidak sama dengan populasi 2.

d. Untuk pengujian pendekatan kritikal kasus di atas adalah sebagai berikut:

Nilai α = 0,10, maka α/2 = 0,05, dengan df numerator = 25 dan df denumerator = 15, maka untuk mencari $F_{\alpha/2}$ hasil pada tabel F adalah sebagi berikut:

Denominator Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom						
		7	8	9	10	15	20	25
15	.10	2.16	2.12	2.09	2.06	1.97	1.92	1.89
	.05	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40	2.33	2.28
	.025	3.29	3.20	3.12	3.06	2.86	2.76	2.69
	.01	4.14	4.00	3.89	3.80	3.52	3.37	3.28

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai $F_{\alpha/2}$ = 2,28

Kita bandingkan nilai dari F dengan $F_{\alpha/2}$ maka hasilnya adalah sebagai berikut:

Tolak H_0, jika $F \geq F_{\alpha/2}$
Apakah $F \geq F_{\alpha/2}$
Apakah 2,40 ≥ 2,28

Hasil pernyataan tersebut adalah pernyataan yang benar, maka kesimpulannya:
H_0 ditolak, artinya varian waktu kedatangan populasi 1 tidak sama dengan populasi 2.

e. Hasil kesimpulan dari kasus di atas adalah sebagai berikut:
- Hasil uji p-value ≥ α, maka H_0 ditolak
- Hasil uji kritikal $X^2 \leq X^2_{\alpha}$, maka H_0 ditolak

Kedua uji tersebut sama dan konsisten, maka kesimpulannya adalah H_0 ditolak. artinya varian waktu kedatangan populasi 1 tidak sama dengan populasi 2.

Daftar Pustaka

Statistics for Business and Economics (13e)” Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran 2017, Cengage Learning