

## Distribusi Probabilitas Kontinue

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami aspek yang ada pada distribusi probabilitas kontinue
2. Memahami konsep distribusi probabilitas seragam.
3. Memahami konsep distribusi probabilitas normal(distribusi normal)

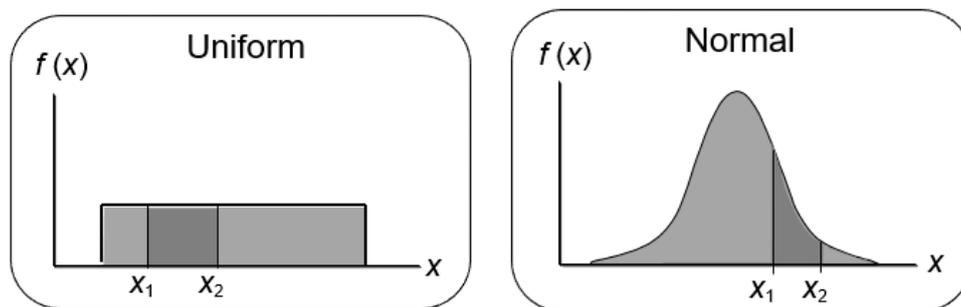
### I. Konsep Distribusi Probabilitas Seragam

Variabel random kontinyu merupakan sembarang nilai dalam suatu interval atau dalam sekelompok interval.

Suatu hal yang mustahil untuk membahas probabilita suatu nilai tertentu dari variabel random kontinyu.

Namun demikian kita dapat membahas probabilita variabel random yang diasumsikan sebagai sebuah nilai dalam suatu interval tertentu.

Probabilita suatu nilai variabel random dalam interval  $x_1$  sampai  $x_2$  didefinisikan sebagai daerah di bawah grafik fungsi kepadatan probabilita (*probability density function*) antara  $x_1$  dan  $x_2$



Gambar 1. Grafik distribusi probabilitas seragam dan distribusi probabilitas normal

### II. Konsep Distribusi Probabilitas Seragam

Variabel random terdistribusi secara seragam manakala probabilitanya proporsional terhadap panjang interval.

The uniform probability density function is:

$$f(x) = 1/(b - a) \text{ for } a \leq x \leq b \\ = 0 \text{ untuk yang lainnya}$$

Dengan :

$a$  = nilai terkecil yang dapat diasumsikan dari variabel

$b$  = nilai terbesar yang dapat diasumsikan dari variabel

- **Expected Value of  $x$**

$$E(x) = (a + b)/2$$

- **Variance of  $x$**

$$Var(x) = (b - a)^2 / 12$$

### **Contoh Kasus 1:**

Pelanggan dari sebuah restoran dikenakan biaya tertentu untuk pengambilan jumlah salad. Hasil pengambilan sampel yang dilakukan memperlihatkan bahwa jumlah salad yang diambil pelanggan yang data terdistribusi secara merata antara 5 ons dan 15 ons

Dari kasus di atas dapat diketahui bahwa fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:

$$f(x) = 1/10 \text{ untuk } 5 \leq x \leq 15 \\ = 0 \text{ untuk lainnya}$$

di mana:

$x$  = berat salad

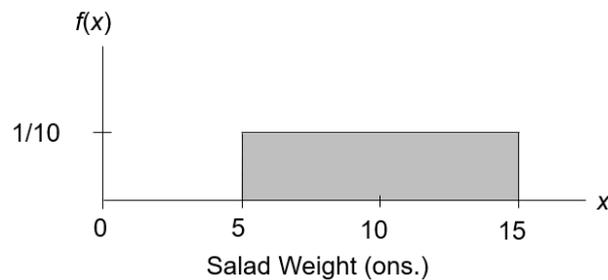
a. Untuk menghitung Expected Value dari  $x$

$$E(x) = (a + b)/2 \\ = (5 + 15)/2 \\ = 10$$

b. Untuk menghitung Variance dari  $x$

$$Var(x) = (b - a)^2/12 \\ = (15 - 5)^2/12 \\ = 8.33$$

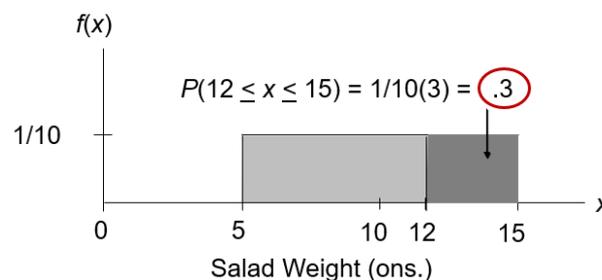
Berat dari isi salad adalah seperti berikut:



Gambar 2. Grafik disribusi probabilitas seragam antara 5 sampai 15 ons

- c. Dari kasus tersebut apabila akan dicari berapa probabilita seorang pelanggan akan mengambil salad antara 12 dan 15 ons?

Untuk menjawab pertanyaan tersebut dapat kita hitung seperti gambar berikut:



Gambar 3. Grafik disribusi probabilitas seragam antara 12 sampai 15 ons

Jawaban untuk meghitung probabilitas seorang pelanggan akan mengambil salad antara 12 dan 15 ons adalah 0.3 ons.

Kasus di atas memperlihatkan bahwa:

- Area di bawah grafik  $f(x)$  dan probabilitas identik/ seragam
- Ini berlaku untuk semua variabel ramdom kontinu
- Probabilitas dari  $x$  didapat dengan mengambil nilai antara nilai terkecil  $x_1$  dan nilai terbesar  $x_2$ , besar probabilitasnya adalah dengan menghitung area di bawah grafik  $f(x)$  pada interval antara  $x_1$  sampai  $x_2$ .

### III. Konsep Distribusi probabilitas normal(distribusi normal)

Distribusi probabilitas normal adalah distribusi yang paling penting untuk menggambarkan variabel random kontinu. Konsep ini banyak digunakan dalam statistik inferensi.

Ini telah digunakan dalam berbagai aplikasi diantaranya :

- Pertumbuhan penduduk
- Kemungkinan surah hujan
- Nilai dari suatu tes
- Pengukuran ilmiah
- Dan lain-lain

Abraham de Moivre merupakan seorang ahli matematika Prancis memperkenalkan konsep ini dengan menerbitkan *The Doctrine of Chances* pada tahun 1733.

Untuk menghitung Fungsi Kerapatan Probabilitas Normal adalah dengan rumus:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2((x-\mu)/\sigma)^2}$$

Dimana :

$\mu$  = mean

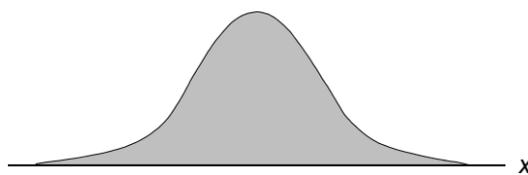
$\sigma$  = standard deviation

$\pi$  = 3.14159

$e$  = 2.71828

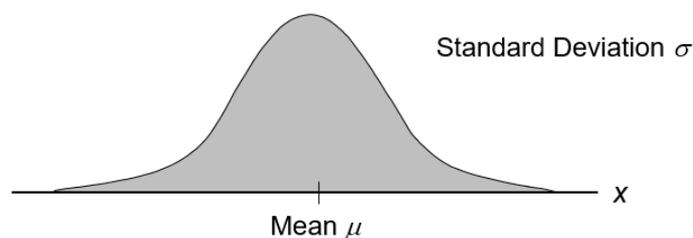
Karakteristik Distribusi Probabilita Normal adalah:

- Bentuk kurva normal seringkali digambarkan sebagai kurva berbentuk lonceng (bell-shaped curve).



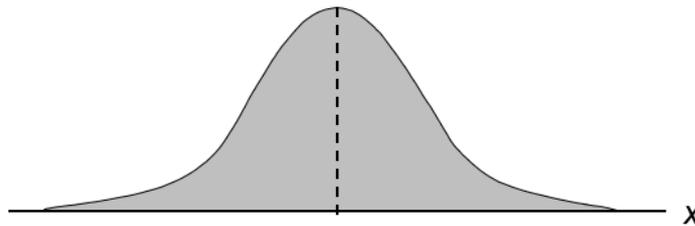
Gambar 4. Grafik distribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Dua Parameter,  $m$  (mean) and  $\sigma$  (standard deviation), menentukan sentral dan bentuk distribusi.



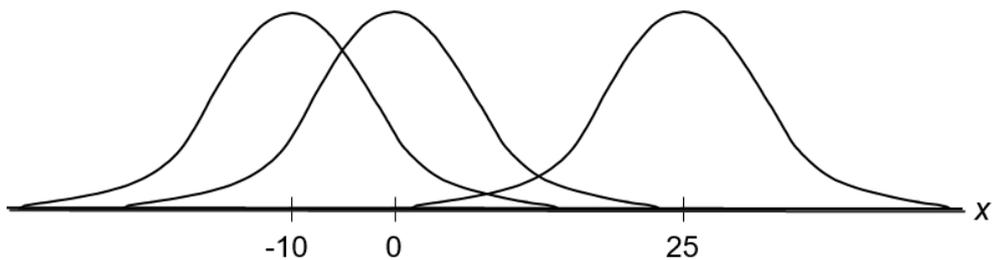
Gambar 5. Grafik distribusi probabilitas normal dengan sumbu x dan mean  $\mu$

- Titik tertinggi dari kurva normal berada pada meannya yang juga merupakan median dan modus.



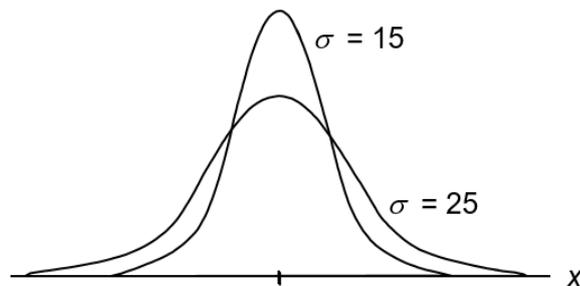
Gambar 6. Grafik distribusi probabilitas normal dengan median dan modus

- Mean dapat berupa sembarang nilai numerik: negatif, nol, atau positif



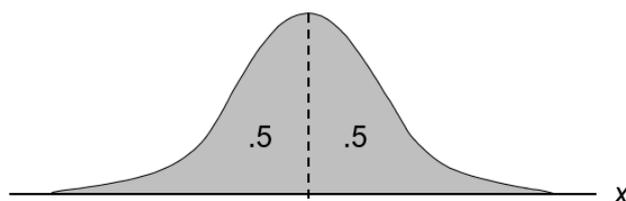
Gambar 7. Grafik persebaran distribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Kurva normal adalah simetris.
- Standar deviasi menentukan lebar kurva: semakin besar nilainya kurva semakin lebar dan mendatar.



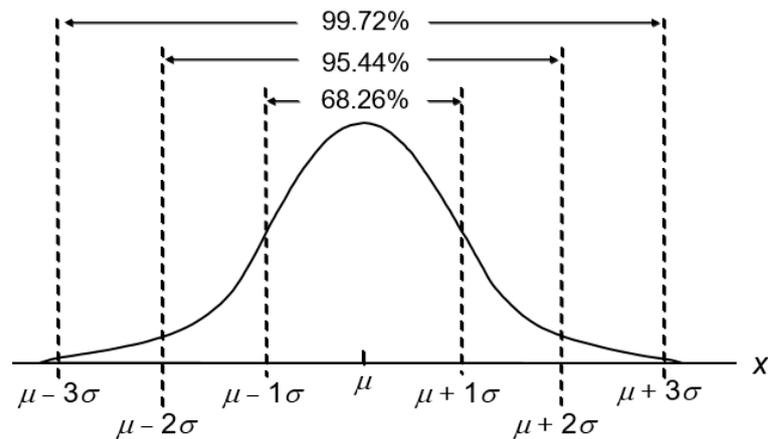
Gambar 8. Grafik distribusi probabilitas normal dengan ketinggian yang berbeda

- Luas total daerah di bawah kurva adalah 1 (0.5 di sebelah kiri mean dan 0.5 di sebelah kanan).



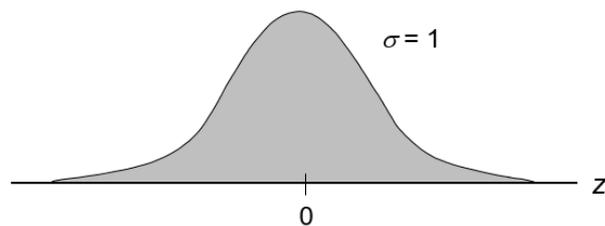
Gambar 9. Grafik distribusi probabilitas normal dengan luas area yang sama

- Probabilita variabel random normal ditunjukkan oleh daerah di bawah kurva
- Persentasi (%) nilai dalam beberapa interval yang biasa digunakan
  - **68.26%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 1 standard deviation** dari meannya.
  - **95.44%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 2 standard deviations** dari meannya.
  - **99.72%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 3 standard deviations** dari meannya.



Gambar 10. Grafik standar distribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Variabel random yang berdistribusi normal dengan mean sama dengan nol dan standar deviasi satu dikatakan memiliki Distribusi Probabilita Normal standar.
- Huruf  $z$  biasa digunakan untuk melambangkan variabel random normal ini
- Huruf  $z$  ( $z$  score) digunakan untuk menunjuk variabel random normal standar maksudnya  $z$  score ini merupakan nilai variabel random seberapa kalinya dari standar deviasi.



Gambar 11. Grafik distribusi probabilitas normal dengan sumbu z

Untuk mengkonversi ke dalam Distribusi Probabilita Normal Standar dengan rumusnya adalah sebagai berikut:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Kita dapat menganggap  $z$  sebagai ukuran berapa kalinya standar deviasi  $x$  dari  $\mu$

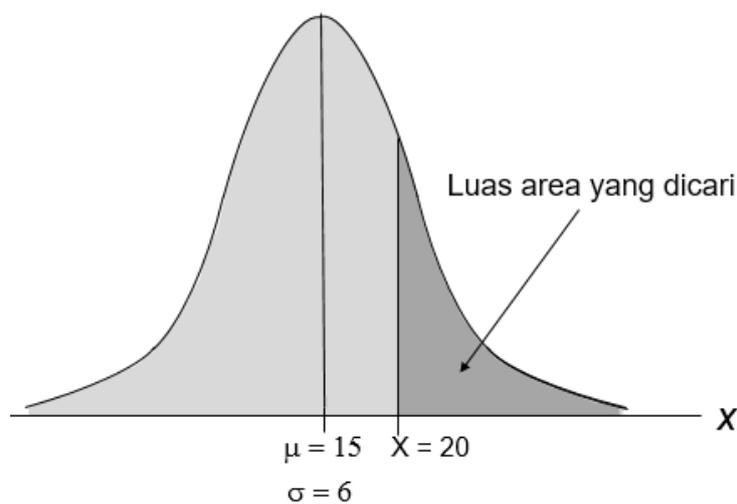
## Contoh Kasus 2

Toko Pep Zone menjual oli kendaraan bermotor. Ketika stok oli berada di bawah 20 gallon, dilakukan pemesanan ulang stok.

Manajer Toko tidak menginginkan kehilangan peluang penjualan akibat kehabisan stok selama menunggu kiriman barang. Dari data penjualan diketahui bahwa jumlah permintaan selama waktu pengisian kembali stok terdistribusi normal dengan mean 15 gallon dan standar deviasi 6 gallon.

Manajer tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya stockout,  $P(x > 20)$

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 12. Grafik contoh kasus 2 distribusi probabilitas normal

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan  $x$  ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned} z &= (x - \mu) / \sigma \\ &= (20 - 15) / 6 \\ &= 0.83 \end{aligned}$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal kumulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri  $z = 0.83$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

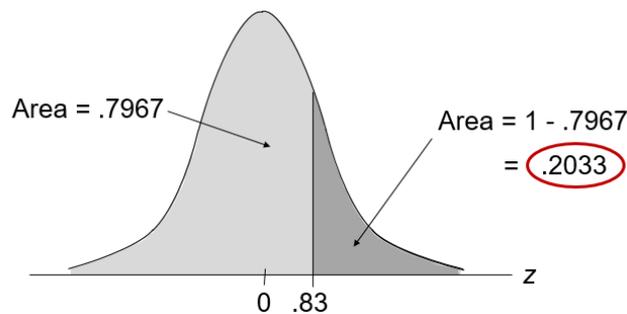
$$P(z \leq .83) = .7967$$

Gambar 13. Tabel distribusi normal kumulatif z positif

- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu 0,83, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,7967. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kanan.
- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kanan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(z > .83) &= 1 - P(z \leq .83) \\
 &= 1 - .7967 \\
 &= .2033
 \end{aligned}$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 14. Grafik contoh kasus 2 distribusi probabilitas normal sumbu z

Tabel distribusi normal kumulatif terdiri dari 2 bagian yaitu tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) dan tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) dengan penjelasan seperti berikut:

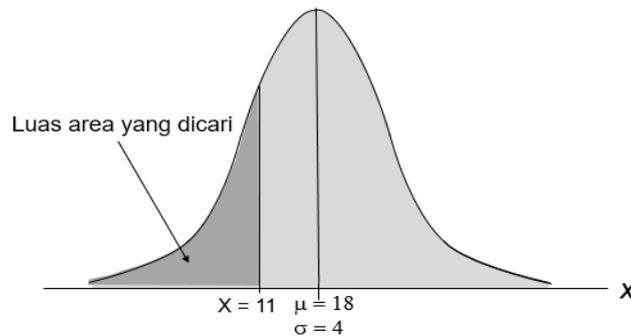
1. tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya positif (+) artinya titik dari x berada dibeselah kanan dari mean nya. Luas area sebelah kanan sama dengan 1 dikurangi dengan nilai yang didapat pada tabel.
2. tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya negatif (-) artinya titik dari x berada dibeselah kiri dari mean nya. Luas area sebelah kiri sama dengan nilai yang didapat pada tabel.

### Contoh Kasus 3

Seorang pedagang dapat menjual baju dengan rata-rata 18 potong setiap minggunya dengan standar deviasi 4 potong. Berapa probabilitasnya pedagang tersebut dapat menjual bajunya lebih sedikit dari 11 potong?

Pedagang tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya penjualan,  $P(x < 11)$

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 15. Grafik contoh kasus 3 distribusi probabilitas normal sumbu x

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan x ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 z &= (x - \mu) / \sigma \\
 &= (11 - 18) / 4 \\
 &= -1.75
 \end{aligned}$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal kumulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri  $z = -1.75$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495

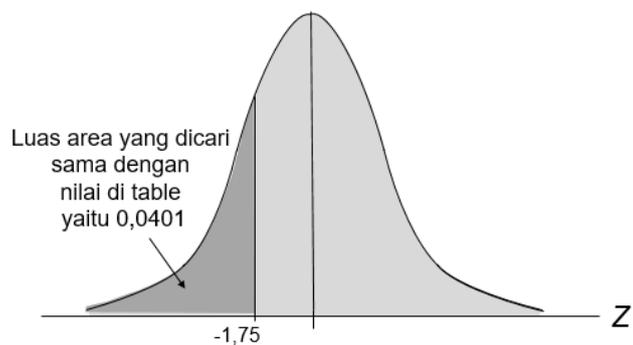
$$P(Z \leq -1,75) = 0,0401$$

Gambar 16. Tabel distribusi normal kumulatif Z negatif

- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan sampai 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu - 1,75, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,0401. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kiri.
- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kiri adalah sebagai berikut:

$$P(z \leq - 1.75) = 0.0401$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



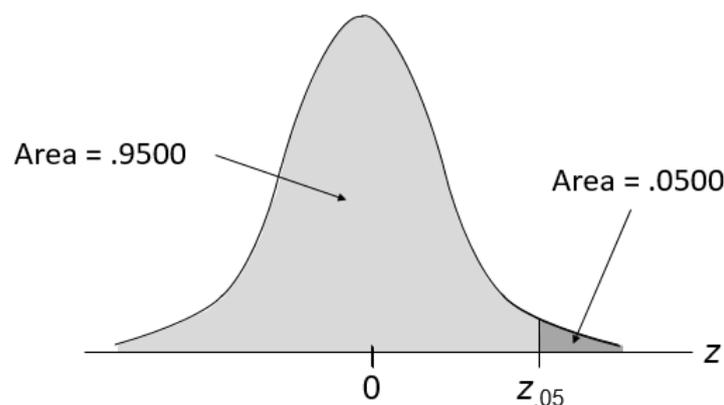
Gambar 17. Grafik contoh kasus 3 distribusi probabilitas normal sumbu z

#### Contoh Kasus 4

Dari contoh kasus 1 Jika manajer Pep Zone menginginkan probabilita kehabisan stiock tidak lebih dari 0.05, berapa seharusnya titik pemesanan kembali?

Manajer tersebut ingin mengetahui berapa jumlah gallon pemesanan kembali (X) dengan nilai probabilitasnya terjadinya stockout tidak lebih dari 0,05.

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 18. Grafik contoh kasus 4 distribusi probabilitas normal sumbu z

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Mencari Z score dengan area yang ada disebelah kiri dari titik  $Z_{0,05}$  Menghitung besar nilai area sebelah kiri dapat dilihat seperti berikut:
- busi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{Area kiri dari } Z_{0,05} &= 1 - 0,05 \\ &= 0,9500 \end{aligned}$$

- Penentuan nilai Z score dapat dilihat pada tabel distribusi normal komulatif sebelah kanan, kemudian kita lihat dengan nilai area 0,95 berada dimana pada bagian nilai area di tabel seperti gambar berikut:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

$$Z_{(0,95)} = 1,645$$

Gambar 19. Tabel distribusi normal komulatif z positif

- Pada tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai Z score dengan area 0,95 pada tabel distribusi normal komulatif sebelah kanan, nilai  $Z = 1,645$
- Setelah didapat nilai Z score nya, kemudian dapat dicari nilai x yang ditanyakan dengan menggunakan rumus Z seperti berikut:

$$\begin{aligned} z_{0,95} &= (x - \mu) / \sigma \\ x &= \mu + z_{0,95} \sigma \\ &= 15 + 1.645(6) \\ &= 24.87 \text{ atau dibulatkan } 25 \end{aligned}$$

- Dengan demikian Pep Zone sebaiknya menentukan titik pengisian kembali pada 25 gallon untuk menjaga probabilita kehabisan stok sebesar 0.05

## **Daftar Pustaka**

- Statistics for Business and Economics (13e)” Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran 2017, Cengage Learning