Modul Kuliah ke 8
Statistik

Interval Estimation

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami Estimasi Interval dengan (σ) Mean populasi diketahui
2. Memahami Estimasi Interval dengan (σ) Mean populasi tidak diketahui.
3. Memahami Penentuan sample size
4. Memahami Estimasi Interval Proporsi

I. Estimasi Interval dengan (σ) Mean Populasi Diketahui

Pada pembahasan sebelumnya yang menyatakan bahwa titik estimator adalah statistik sampel yang digunakan untuk memperkirakan parameter populasi. Misalnya sample mean adalah point estimator dari populasi mean atau proporsi sample adalah point estimator dari proporsi populasi. Point estimator tidak dapat memperkirakan point estimasi yang tepat pada nilai populasinya, maka disini dapat diperkirakan estimasi interval sebagai jarak maksimal sampai minimal estimasi untuk nilai dari populasinya.

Interval estimasi dapat dihitung dengan menambah dan mengurangi nilai dari margin error pada titik estimasi.

Bentuk umum interval estimasi dapat ditulis sebagai berikut:

Point estimate ± Margin of error

Tujuan interval estimasi adalah untuk memberikan informasi tentang seberapa dekat titik perkiraan tersebut yang disediakan oleh sampel untuk menilai parameter populasi.

Bentuk umum estimasi interval rata-rata populasi adalah :

$$\bar{x} \pm \text{Margin of error}$$

Bentuk umum estimasi interval proporsi populasi adalah :

$$\bar{p} \pm \text{Margin of error}$$

Untuk mengembangkan estimasi interval mean populasi, dapat menggunakan standar deviasi populasi atau standar deviasi sampel yang digunakan untuk menghitung margin error.

Standar deviasi populasi (σ) diperlukan untuk menghitung perkiraan margin error dan memperkirakan interval estimasi.

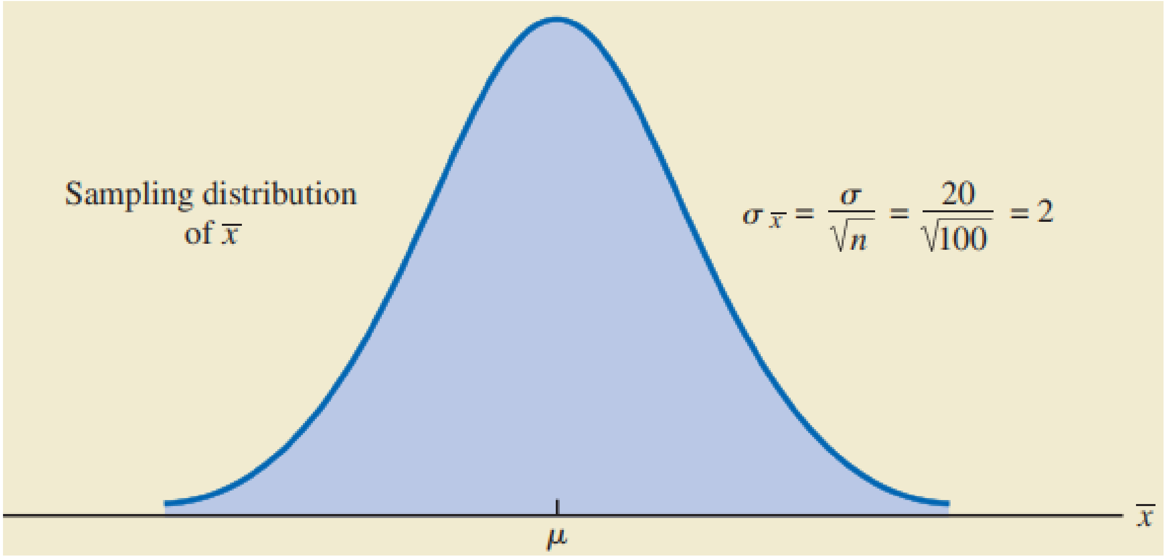
Pada pembahasan sebelumnya kita ketahui distribusi sampling dari $\bar{x}$ dapat menghitung probabilitas bahwa $\bar{x}$ berada dalam jarak tertentu dari μ.

Kita dapat menyimpulkan bahwa distribusi sampling $\bar{x}$ mengikuti distribusi normal dengan rumus

$$\text{standar error} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Misalkan diketahui $\sigma = 20$ dan $n = 100$, maka

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2$$



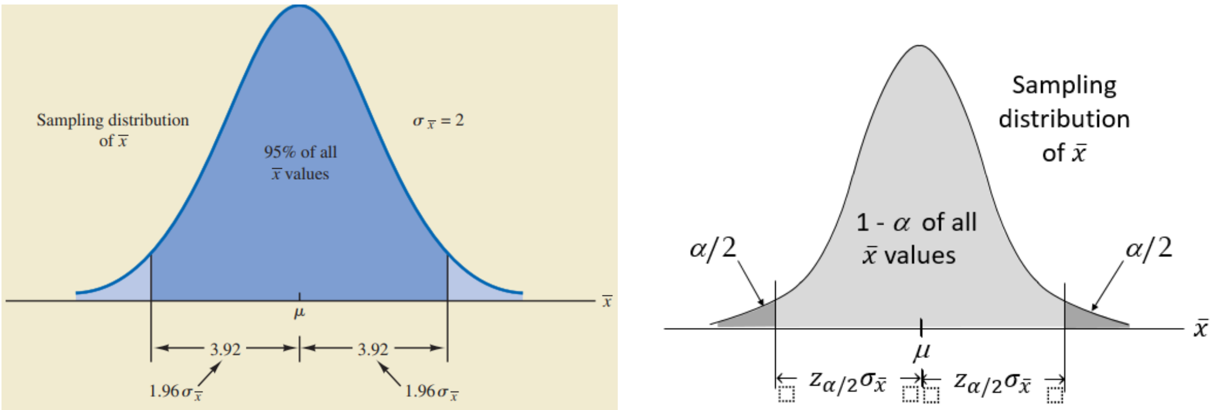
Gambar 1. Distrubusi sampling dari sample mean pada 100 sample

Dari contoh tersebut misalnya kita asumsi dengan confident 95% dari nilai variabel random distribusi normal akan berada (z) antara ± 1,96 standar deviasi dari mean-nya. Apabila asumsi nilai distribusi sampling dari $\bar{x}$ adalah distribusi normal dengan confident 95%, maka nilai dari $\bar{x}$ adalah antara ± 1,96 $\sigma_{\bar{x}}$ dari mean populasi (μ).

Pada contoh di atas diketahui bahwa standar error $\sigma_{\bar{x}} = 2$, maka :

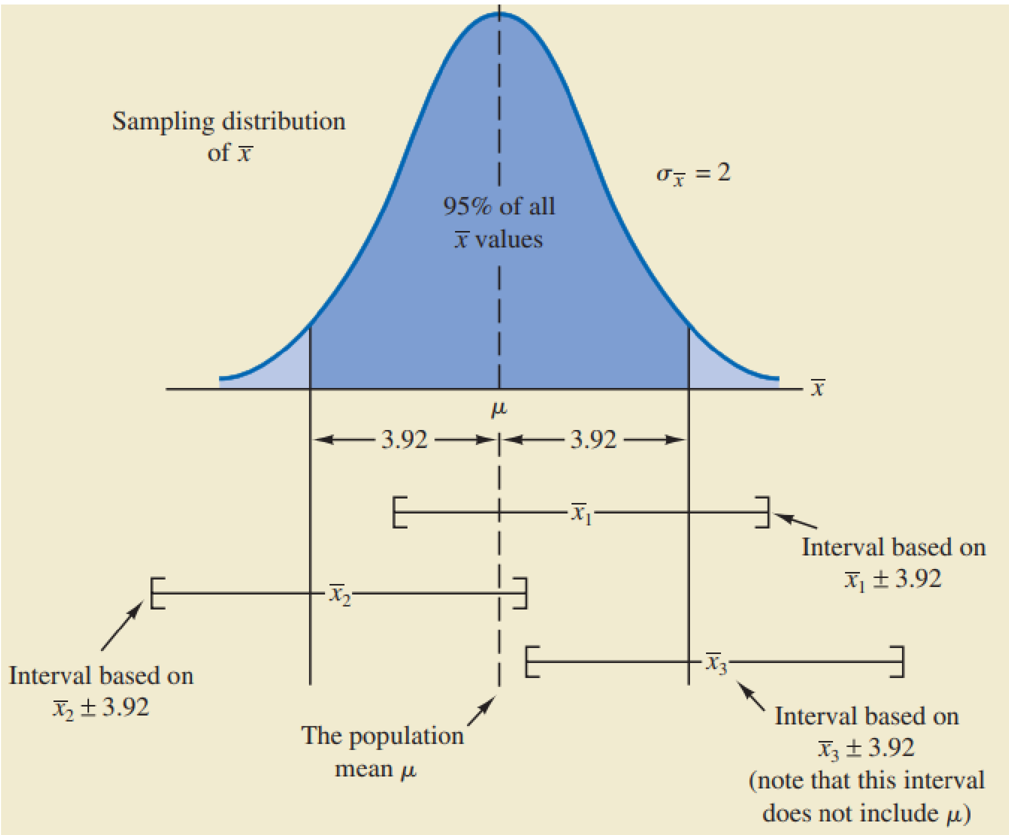
$$\pm 1{,}96\,(2) = 3{,}92$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa dengan confident 95% dari nilai $\bar{x}$ dengan jumlah sample n = 100, makamargin error-nya akan berada pada ± 3,92 dari mean populasi μ.



Gambar 2. Distrubusi sampling x̄ berada pada jarak 3,92

Apabila posisi dari x̄ yang diambil dari sample dapat berbeda-beda, maka akan menghasilkan jarak ke mean populasi yang berbeda seperti gambar berikut:



Gambar 3. Distrubusi sampling x̄ dengan posisi yang berbeda-beda

Secara umum rumus untuk menghitung interval estimasi dari mean populasi dengan (σ) standar deviasi populasinya diketahui adalah :

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dimana:

$\bar{x}$ = Mean sample

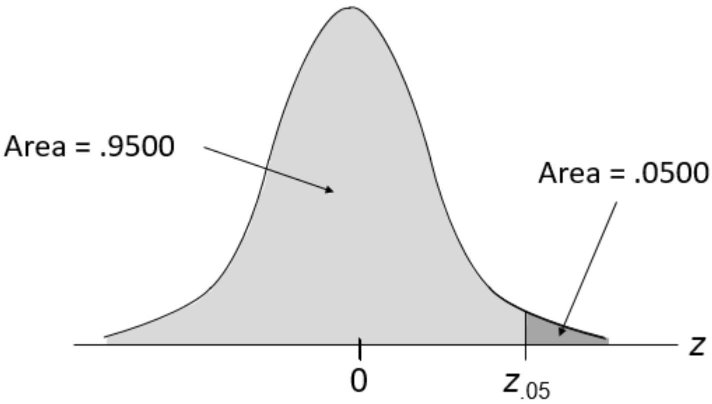
$Z_{\alpha/2}$ = Nilai standar deviasi untuk mentukan area dari α/2.

α = signifikasi dengan (1-α) adalah confident (95%), maka α = 0,05.

Contoh level confident dengan nilai α dan nilai dari $Z_{\alpha/2}$ hasil dari tabel distribusi normal dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Level confident dan nilai α

Level Confident	**α**	**α/2**	**$Z_{\alpha/2}$**
90%	0,10	0,05	1,645
95%	0,05	0,025	1,960
99%	0,01	0,005	2,576



Gambar 4. Area disribusi probabilitas normal

Untuk mendapatkan nilai dari Z0,05 dengan confident 90%, α = 0,1 dan α/2 = 0,05 dapat dilihat seperti pada tabel berikut:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$Z_{(0,95)}$ = 1,645

Gambar 5. Tabel distribusi normal komulatif z positif

Contoh 1

Diketahui jumlah sample n = 40 item dengan sample mean $\bar{x}$ = 25, dengan standar deviasi populasinya σ = 5.

Dari kasus tersebut:

a. Berapa standar error kasus tersebut?
b. Berapa margin error dengan confident 95%?
c. Berapa Interval dari mean populasinya?

Jawaban

a. Standar error = $\sigma_{\bar{x}} = \frac{5}{\sqrt{40}} =$ 0,79

   Jadi Standar error ksus tersebut adalah 0,79

b. Margin error pada confident 95% , maka α = 0,05 → α/2 = 0,025

$$= Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= Z_{0,025} \frac{5}{\sqrt{40}}$$

= 1,96 (0,79)

= 1.55

c. Interval dari mean populasinya:

$$= \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 25 \pm 1{,}55$$

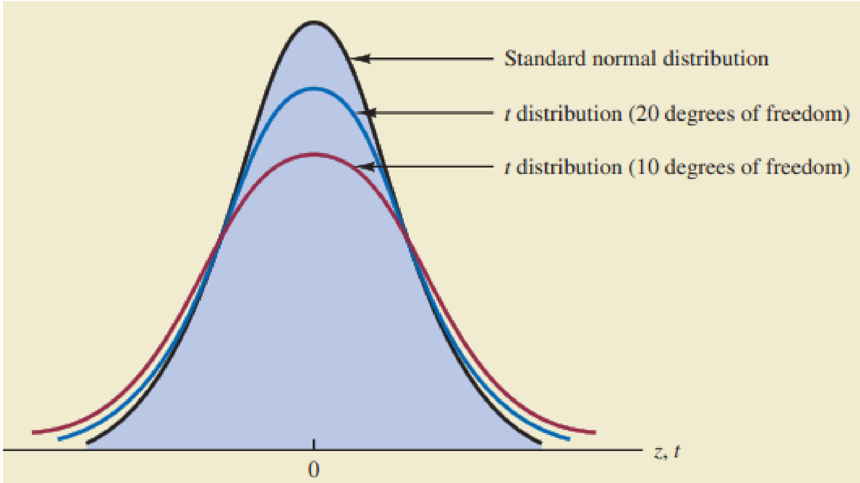
   Intervalnya adalah dari 25 – 1,55 = 23,45 sampai 25 + 1,55 = 26,55
   Jadi intervalnya mean populasinya adalah dari 23,45 sampai 26,55

II. Estimasi Interval dengan (σ) Mean populasi Tidak Diketahui

Ketika kita akan mengembangkan estimasi interval mean populasi dengan standar deviasi populsinya tidak diketahui, maka kita dapat menggunakan standar deviasi sampel yang dapat digunakan untuk menghitung margin error.

Pada kasus ini dalam penentuan estimasi intervalnya dengan menggunakan standar deviasi sample, maka kita tidak dapat menggunakan nilai dari Z standar deviasi, tetapi kita harus menggunakan nilai dari t distribusi. Untuk mencari nilai t distribusi kita dapat memperolehnya dari tabel t distribusi.

Pada tabel t distribusi ini, untuk mendapatkan nilai t, kita harus mengetahui derajat ketinggian (*degrees of freedom*) dari grafik distribusi normalnya. Derajat ketinggian ini dapat menentukan luas area pada t distribusi. Ilustrasinya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



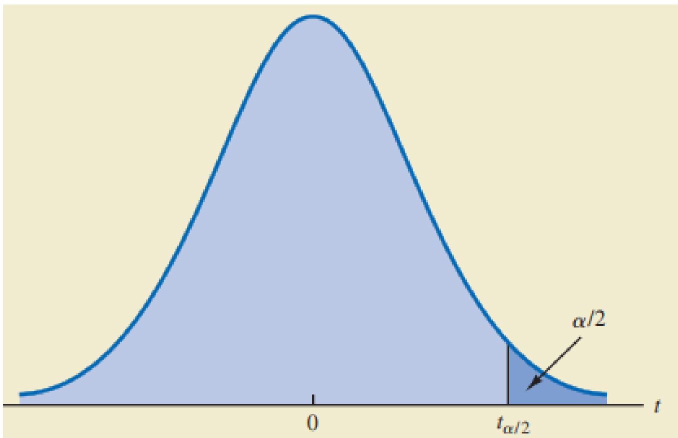
Gambar 6. Derajat ketinggian pada t distribusi

Tampilan tabel t distribusi dapat dilihat pada gambar berikut:

Tabel 2. Tabel t Distribusi

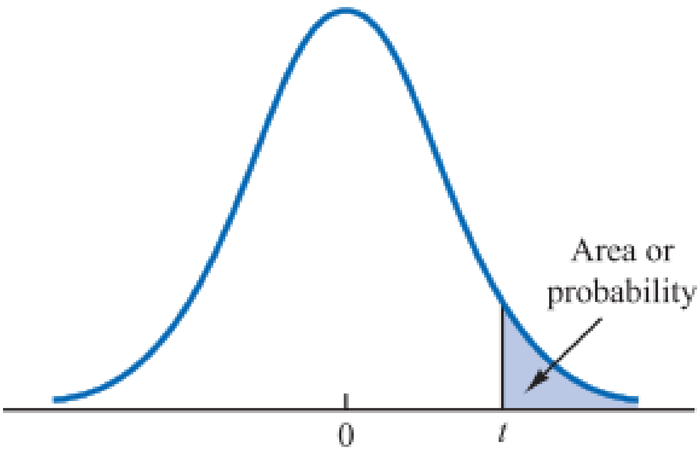
Degrees of Freedom	Area in Upper Tail						
	.20	.10	.05	.025	.01	.05	.005
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	31.821	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	6.965	9.925
3	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	4.541	5.841
4	.941	1.533	2.132	2.776	$\boxed{3.747}$	3.747	4.604
5	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	3.365	4.032
6	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.143	3.707
7	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	2.998	3.499
8	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	2.896	3.355
9	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	2.821	3.250
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
60	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.390	2.660
61	.848	1.296	1.670	2.000	2.389	2.389	2.659

Pada tabel diatas, misalnya nilai $t_{0,01}$ dengan df = 4, maka nilai t = 3,747
Tampilan grafik t distribusi normal dapat dilihat seperti gambar berikut:



Gambar 7. Posisi distribusi normal $t_{\alpha/2}$

Tampilan nilai dari t tabel dapat dilihat seperti gambar berikut:



Gambar 8. Area distribusi normal tabel t

Secara umum rumus untuk menghitung interval estimasi dari mean populasi dengan (σ) standar deviasi populasinya tidak diketahui adalah :

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Dimana:

$\bar{x}$ = Mean sample
$t_{\alpha/2}$ = Nilai dari t distribusi normal untuk mentukan area dari α/2 pada area sisi kanan.
α = signifikasi dengan (1-α) adalah confident (95%), maka α = 0,05
df = (n – 1)

Untuk rumus standar deviasi sampel adalah :

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Contoh 2

Diketahui simple random sample dengan n = 54 dengan sample mean $\bar{x}$ = 22,5 dan standar deviasi sample = 4,4.

Hitunglah :

a. Standar error kasus tersebut?
b. Margin error dengan confident 95%?
c. Interval dari mean populasinya?

Jawaban

a. Standar error = $\sigma_{\bar{x}}$ = $\frac{s}{\sqrt{n}}$ = $\frac{4,4}{\sqrt{54}}$ = 0,598

Jadi Standar error ksus tersebut adalah 0,599

b. Margin error pada confident 95% , maka α = 0,05 → α/2 = 0,025, df = (54-1) = 53.

$= \ t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$= \ t_{0,025}\frac{4,4}{\sqrt{54}}$

= 2.006 (0,598)

= 1 ,199

c. Interval dari mean populasinya:

$= \ \bar{x} \ \pm \ t\frac{s}{\sqrt{n}}$

$= \ 22,5 \ \pm \ 1$

Intervalnya adalah dari 22,5 – 1,199 = 21,3 sampai 22,5 + 1,199 = 23,69
Jadi intervalnya mean populasinya adalah dari 21,3 sampai 23,69

III. Menentukan Sample Size

Peran dari ukuran sample dapat berpengaruh dalam memberikan tingkat kepercayaan pada perkiraan interval estimasi pada mean populasi secara terdistribusi secara normal. Kita dapat mencari berapa banyak ukuran sample yang akan diambil dengan menentukan margin error yang diinginka.

Pada kasus rumus untuk menghitung interval estimasi dari mean populasi dengan (σ) standar deviasi populasinya diketahui adalah :

$$\bar{x} \ \pm \ Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nilai kuantitas dari rumus $Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ merupakan nilai margin error, dimana variabel $Z_{\alpha/2}$. Standar deviasi populasi σ, dan ukuran sample (n) adalah kombinasi perhitungan untuk mencari margin error. Apabila margin error-nya (E) sudah diketahui, maka kita dapat mencari sample size (n) dengan rumus berikut:

$$E = \ Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Kita dapat pindahkan $\sqrt{n}$, maka persamaannya menjadi berikut:

$$\sqrt{n} = \ Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}$$

Dari persamaan di atas, maka kita dapat mencari ukuran sample dengan rumus :

$$n = \frac{\left(z_{\alpha/2}\right)^2 \sigma^2}{E^2}$$

Contoh 3

Diketahui margin error = 10 dengan asumsi standar deviasi populasi = 40, dengan confident sebesar 95%.

Hitunglah berapa besar sample size?

Jawaban

Menghitung sample size dengan confident 95%, maka α = 0,05 → α/2 = 0,025.

$$n = \frac{\left(z_{\alpha/2}\right)^2 \sigma^2}{E^2}$$

$$n = \frac{\left(z_{0,025}\right)^2 40^2}{10^2}$$

n = 61,47 dibulatkan menjadi 62

IV. Populasi Proporsi

Seperti yang telah disebutkan di atas bahwa bentuk umum dari rumus untuk perkiraan interval pada proporsi populasi p adalah :

$\bar{p} \pm$ Margin of error

Untuk menghitung standar error dari proporsi populasi p dapat menggunakan rumus:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Untuk rumus margin error dapat dilihat seperti berikut:

$$\text{Margin error} = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Dari persamaan di atas, maka rumus estimasi interval dari proporsi populasi adalah :

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Dimana:

$\bar{p}$ adalah mean dari proporsi
$z_{\alpha/2}$ adalah seberapa stndar deviasi
n adalah sample size

(1-α) adalah koefisien confident

Contoh 4

Dari random sample yang semuanya berjumlah 400 orang renponden, ada 100 orang yang menjawab Ya dan sisanya menjawab Tidak. Menggunakan confident 95%.

Hitunglah:

a. Berapa poin estimasi proporsi yang menjawab Ya?

b. Berapa estimasi standar error dari proporsi σ_p?

c. Berapa interval proporsi populasinya?

Jawaban

a. Poin estimasi $\bar{p}$ adalah :

$$\bar{p} = 100/400 = 0,25$$

Jadi Poin estimasi untuk $\bar{p}$ adalah : 0,25

b. Estimasi standar error dari proporsi σ_p adalah :

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{400}}$$

$$\sigma_p = 0,0217$$

Jadi estimasi standar error dari proporsi σ_p adalah 0,0217

c. Interval proporsi populasi dengan confident 95%, maka α = 0,05, α/2 = 0,025 adalah :

$$\bar{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$0,25 \pm z_{0,025}\sqrt{\frac{0,25(1-0,25)}{400}}$$

$$0,25 \pm 1,96\ (0,0217)$$

$$0,25 \pm 0,0424$$

$$0,25\text{-}0,0424 = 0,2076 \text{ sampai } 0,25 + 0,0424 = 0,2924$$

Jadi Interval proporsi populasi adalah mulai dari 0,2076 sampai 0,2924

Daftar Pustaka

Statistics for Business and Economics (13e)" Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran 2017, Cengage Learning