ANALISA MARKOV

Analisa Markov memberikan informasi probabilita mengenai situasi keputusan yang dapat membantu pengambil keputusan untuk membuat keputusan. Dengan kata lain, analisa Markov bukan merupakan teknik optimasi; melainkan merupakan ***teknik deskriptif*** yang menghasilkan informasi probabilita.

Analisa Markov dapat diterapkan terutama pada sistem yang menampilkan pergerakan probabilita dari satu keadaan ke keadaan lainnya, sepanjang waktu. Sebagai contoh, analisa Markov dapat digunakan untuk :

1. Menentukan probabilita bahwa sebuah mesin hari ini dapat beroperasi dan keesokan harinya rusak.
2. Seorang pelanggan akan mengganti merek bijirinnya dari satu bulan ke bulan berikutnya.

Karakteristik Analisa Markov

Analisa Markov dapat digunakan untuk menganalisa sejumlah situasi keputusan yang berbeda, sebagai contoh yaitu analisa perpindahan merek yang dilakukan oleh pelanggan. Analisa Markov memberikan informasi mengenai probablita perpindahan pelanggan dari satu merek ke satu atau lebih merek lainnya.

Suatu komunitas kecil memiliki dua pompa bensin, Petroco dan National. Penduduk komunitas tersebut membeli bensi pada kedua pompa bensin tersebut atas dasar bulanan. Bagian pemasaran Petroco mengadakan survei terhadap sejumlah penduduk dan menemukan bahwa pelanggan tidak setia sepenuhnya pada pompa bensin manapun. Pelanggan akan pindah pompa bensin sebagai akibat dari adanya periklanan, pelayanan, dan faktor lainnya. Bagian pemsaran menemukan bahwa jika seorang pelanggan membeli bensi dari Petroco di bulan apapun, probabilita yang ada hanya sebesar 0.6 bahwa pelanggan tersebut akan tetap membeli dari Petroco di bulan berikutnya dan 0.4 bahwa pelanggan tersebut akan membeli bensin dari National di bulan berikutnya. Demikian pula jika seorang pelanggan mengadakan transaksi dengan National di suatu bulan, terdapat probabilita sebesar 0.8 bahwa pelanggan tersebut akan membeli dari National di bulan berikutnya dan 0.2 bahwa pelanggan tersebut akan membeli dari Petroco. Probabilita – probabilita ini dirangkum dalam tabel 1.

Bulan Ini	**Bulan Berikutnya**	
	Petroco	**National**
Petroco	0.6	0.4
National	0.2	0.8

Tabel 1. Probabilita Pergerakan Pelanggan per Bulan

Contoh ini mengandung beberapa asumsi penting :

1. Perhatikan bahwa dalam tabel 1, jumlah probabilita tiap baris sama dengan 1.0. Ini berarti bahwa jika seorang pelangan melakukan transaksi dengan Petroco di suatu bulan, pelanggan tersebut ***pasti*** melakukan transaksi entah dengan Petroco atau National di bulan berikutnya.
2. Probabilita – probabilita dalam tabel 1 berlaku untuk setiap pelanggan yang membeli bensin.
3. Kapanpun pelanggan membeli bensin, probabilita ia melakukan transaksi dengan salah satu pompa bensin dalam bulan berikutnya adalah yang tertera dalam tabel1.
4. Kejadian – kejadian yang terjadi merupakan kejadian yang berdiri sendiri sepanjang waktu.

- Probabilita transisi adalah probabilita dari keadaan satu ke keadaan yang lain dalam satu periode.
- Sifat – sifat Markov sebagai berikut :
  a. Sifat 1 : Jumlah probabilita transisi untuk suatu awal keadaan dari suatu sistem tertentu sama dengan 1.0
  b. Sifat 2 : Probabilita – probabilita tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
  c. Sifat 3 : Probabilita transisi konstan sepanjang waktu.
  d. Sifat 4 : Keadaan merupakan keadaan yang independen sepanjang waktu.

Informasi Analisa Markov

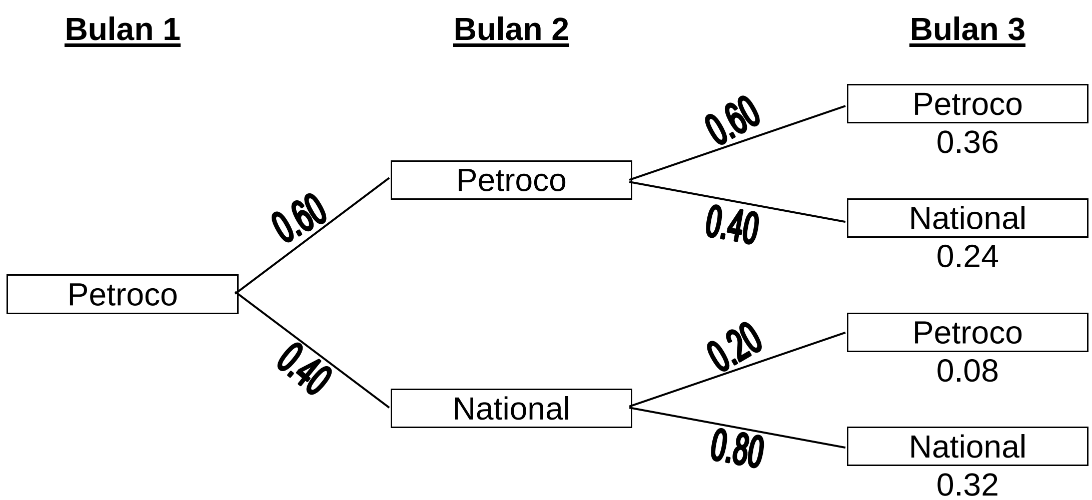
– Informasi yang tersedia dari analisa Markov adalah probabilita berada dalam suatu keadaan di masa yang akan datang, yang juga merupakan informasi yang bisa kita dapatkan dari ***diagram pohon***.

– Contoh :

Kedua pompa bensin tersebut ingin mengetahui probabilita seorang pelanggan melaukan transaksi dalam bulan ketiga dengan asumsi bahwa pelanggan tersebut melakukan transaksi dengan mereka bulan ini (1). Analisa ini dapat dilakukan untuk masing-masing pompa bensin dengan menggunakan diagram pohon, seperti ditunjukkan dalam gambar 1 dan 2.

Untuk menentukan probabilita seorang pelangan melakukan transaksi dengan Petroco di bulan 3 dengan melihat kenyataan bahwa pada bulan 1 ia melakukan transaksi dengan Petroco, kita harus menjumlahkan dua cabang probabilita yang berkaitan dengan Petroco dalam gambar 1.

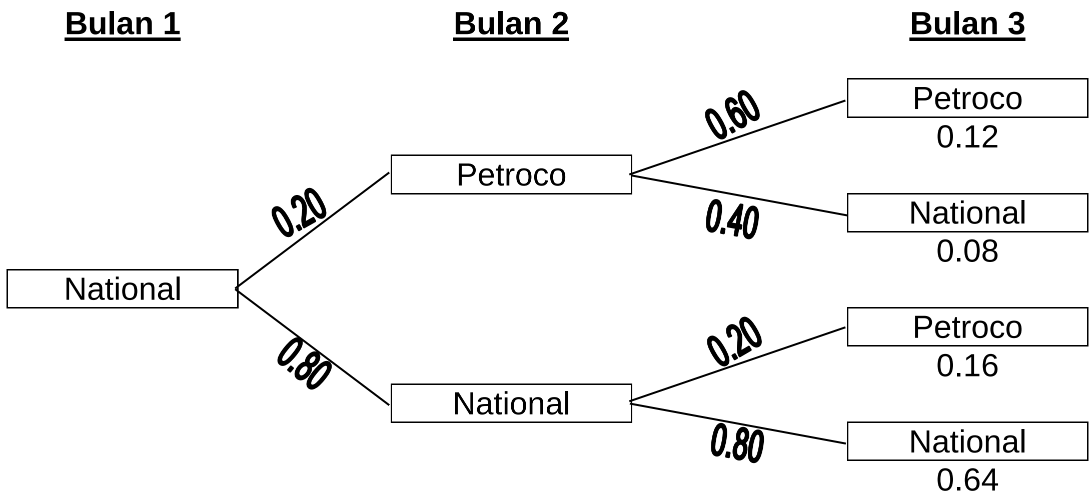
0.36+0.08 = 0.44, probabilita transaksi dengan Petroco dalam bulan 3.



Gambar 1. Probabilita keadaan di masa yang akan datang berdasarkan transaksi pelangan dengan Petroco bulan ini

Untuk menentukan probabilita pembelian bensin dari National dalam bulan 3, kita menjumlahkan dua cabang probabilita yang berkaitan dengan National dalam gambar 1.

0.24+0.32=0.56, probabilita transaksi dengan National dalam bulan 3.



Gambar 2. Probabilita keadaan di masa yang akan datang berdasarkan transaksi pelanggan dengan National di bulan ini.

Analisa yang sama dapat dilakukan untuk kondisi dimana seorang pelanggan pada awalnya membeli bensin dari National, seperti ditunjukkan dalam Gambar 2. Dengan asumsi bahwa National merupakan keadaan awal dalam bulan 1, probabilita pembelian bensin dari National dalam bulan 3 adalah

$$0.08 + 0.64 = 0.72$$

dan probabilita pembelian dari Petroco dalam bulan 3 adalah

$$0.12 + 0.16 = 0.28$$

- Perhatikan bahwa untuk setiap keadaan awal, baik Petroco maupun National, jumlah probabilita yang berakhir pada keadaan di bulan 3 manapun adalah sama dengan 1.0.

Keadaan awal	**Probabilita Transaksi di Bulan 3**		
	Petroco	**National**	**Jumlah**
Petroco	0.44	0.56	1.00
National	0.28	0.72	1.00

- Walaupun sangan logis, penggunaan diagaram pohon untuk analisa jenis ini dianggap banyak menghabiskan waktu dan tidak praktis. Sebagai contoh, jika Petroco ingin mengetahui probabilita seorang pelanggan yang melakukan transaksi dengan mereka di bulan satu akan tetap melakukan transaksi dengan mereka di bulan 10, suatu diagram pohon yang besar harus dibuat. Sebagai alternatif, analisa diatas yang dilakukan dengan menggunakan diagram pohon dapat juga diselesaikan dengan menggunakan teknik ***aljabar matriks***.

Matrik Transisi

– Probabilita pergerakan pelanggan dari satu pompa bensin ke pompa bensin lain dalam periode satu bulan, yang ditampilkan dalam bentuk tabel pada Tabel 1, dapat juga ditampilkan dalam bentuk susunan angka berbentuk empat persegi panjang yang disebut ***matriks***, seperti ditunjukkan di bawah ini.

$$\begin{array}{ll} \textit{Bulan Pertama} & \quad \textit{Bulan Berikutnya} \\ & \begin{array}{cc} \textit{Petroco} & \textit{National} \end{array} \\ T = \text{Petroco} & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$} \\ \quad\;\; \text{National} & \end{array}$$

– Karena sebelumnya telah didefinisikan probabilita ini sebagai probabilita transisi, maka matriks diatas adalah ***matriks transisi***.

– Keadaan sekarang dari suatu sistem ditulis pada sisi kiri matriks transisi, dan keadaan mendatang dalam periode waktu berikutnya ditulis pada sisi kanan.

– Dalam analisa Markov akan digunakan beberapa simbol baru. Ditetapkan probabilta transaksi seorang pelanggan dengan Petroco dalam periode *i*, dengan asumsi bahwa pada awalnya pelanggan tersebut melakukan transaksi dengan Petroco, seperti

Probabilita transaksi dengan Petroco

Periode mendatang *i*

$$P_P(i)$$

Keadaan awal Petroco

– Demikian pula halnya, probabilita transaksi seorang pelanggan dengan National pada periode *i*, dengan asumsi pelanggan tersebut pada awalnya melakukan transaksi dengan Petroco, adalah

Probabilita transaksi dengan National

Periode mendatang *i*

$N_P\,(i)$

6

Keadaan awal Petroco

- Sebagai contoh, probabilita transaksi seorang pelanggan dengan National di bulan 2, dengan asumsi pelanggan tersebut pada awalnya melakukan transaksi dengan Petroco, adalah $N_p\,(2)$.

  Probabilita transaksi seorang pelanggan dengan Petroco dan National di periode mendatang *i*, dengan asumsi pelanggan tersebut pada mulanya melakukan transaksi dengan National, didefinisikan sebagai $P_n(i)$ dan $N_n(i)$.

  (Saat menginterpretasikan simbol-simbol ini, ingatlah selalu bahwa ***subscript*** menunjuk pada keadaan awal).

  Jika seorang pelanggan saat ini melakukan transaksi dengan Petroco (bulan 1), probabilita berikut ini tersedia:

  $P_p(1) = 1.0$

  $N_p(1) = 0.0$

  Dengan kata lain, probabilita transaksi pelanggan dengan Petroco di bulan 1, dengan asumsi pelanggan tersebut melakukan transaksi dengan Petroco adalah 1.0.

  Probabilita-probabilita ini juga dapat disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut:

  $$[Pp(1)\ \ Np(1)] = [1.0\ \ 0.0]$$

- Matriks ini menentukan kondisi awal dari sistem contoh kita, dengan asumsi seorang pelanggan pada awalnya melakukan transaksi dengan Petroco, seperti dalam Gambar 1.
- Dengan kata lain, seorang pelanggan pada mulanya melakukan transaksi dengan Petroco pada bulan 1. Kita dapat menentukan probabilita berikutnya atas transaksi

pelanggan dengan Petroco atau National di bulan 2 dengan mengalikan matriks di atas dengan matriks transisi, sebagai berikut :

$$\textit{Bulan } 2 \rightarrow \begin{bmatrix} Pp(2) & Np(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \end{bmatrix}$$

- Probabilita-probabilita sebesar 0.60 untuk transaksi pelanggan dengan Petroco dan 0.40 untuk transaksi pelanggan dengan National adalah sama dengan probabilita-probabilita yang dihitung oleh diagram pohon dalam gambar 1.
- Prosedur yang sama digunakan untuk menentukan probabilita bulan 3, namun sekarang kita mengalikan matriks transisi dengan matriks bulan 2.

$$\textit{Bulan } 3 \rightarrow \begin{bmatrix} Pp(3) & Np(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \end{bmatrix}$$

- Probabilita keadaan untuk beberapa bulan yang berurutan adalah sebagai berikut :

  Bulan 4 : [*Pp*(4) *Np*(4)] = [0.38 0.62]

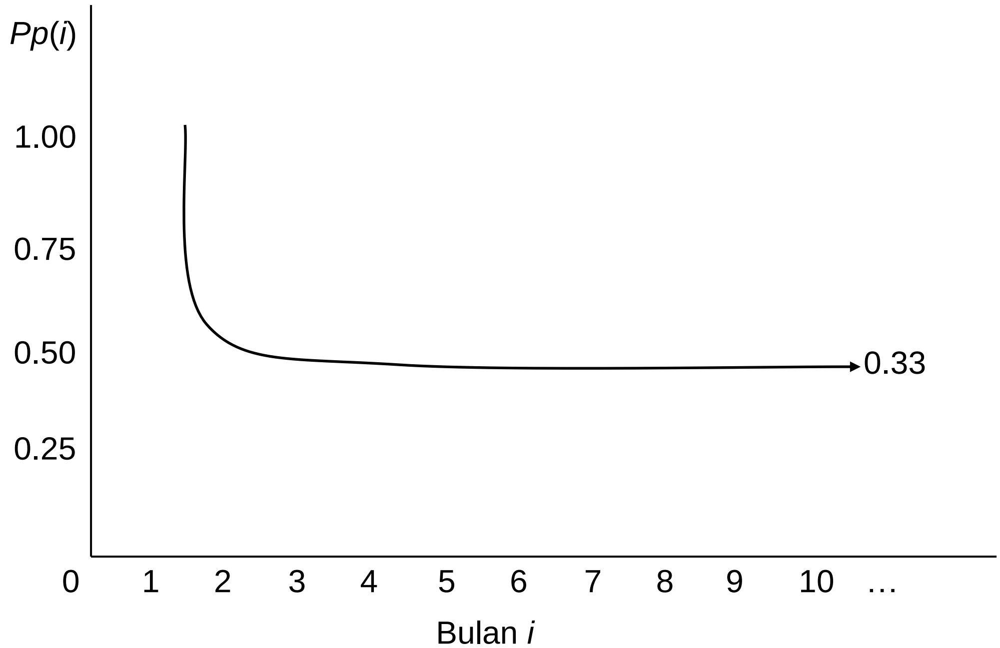
  Bulan 5 : [*Pp*(5) *Np*(5)] = [0.35 0.65]

  Bulan 6 : [*Pp*(6) *Np*(6)] = [0.34 0.66]

  Bulan 7 : [*Pp*(7) *Np*(7)] = [0.34 0.66]

  Bulan 8 : [*Pp*(8) *Np*(8)] = [0.33 0.67]

  Bulan 9 : [*Pp*(9) *Np*(9)] = [0.33 0.67]
- Pada bulan yang akan datang probabilita keadaan mulai menunjukkan tidak terdapat perubahan sama sekali. Untuk contoh ini, probabilita keadaan yang muncul setelah bulan *i* adalah [*Pp*(*i*) *Np*(*i*)] = [0.33 0.67]
- Karakteristik probabilita keadaan yang mendekati nilai konstan setelah sejumlah periode waktu tertentu ditunjukkan oleh *Pp*(*i*) dalam gambar 3.
- *Np*(*i*) memperlihatkan karakteristik yang sama pada saat ia mendekati nilai 0.67. Ini berpotensi memberikan hasil yang bernilai bagi pengambil keputusan. Dengan kata lain, sekarang pemilik pompa bensi dapat menyimpulkan bahwa setelah beberapa bulan tertentu di masa mendatang, terdapat probabilita sebesar 0.33 bahwa pelanggan akan melakukan transaksi dengan Petroco jika pada awalnya ia melakukan transaksi dengan Petroco.



Gambar 3. Probabilita *Pp*(*i*) untuk nilai mendatang sebesar *I*

- Analisa yang sama dapat dilakukan dengan asumsi keadaan awal dimana pada mulanya pelanggan melakukan transaksi dengan National di bulan 1. Analisa ini, seperti yang ditunjukkan di bawah, berhubungan dengan diagram pohon dalam gambar 2.
- Dengan asumsi bahwa pada awalnya pelanggan melakukan transaksi dengan pompa National, maka [*Pn*(1) *Nn*(1)] = [0.0 1.0]
- Dengan menggunakan probabilita keadaan awal ini, kita dapat menghitung probabilita keadaan masa mendatang sebagai berikut :

$$\textit{Bulan } 2 \rightarrow [Pn(2) \quad Nn(2)] = [0.0 \quad 1.0]\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$
$$= [0.20 \quad 0.80]$$
$$\textit{Bulan } 3 \rightarrow [Pn(3) \quad Nn(3)] = [0.20 \quad 0.80]\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$
$$= [0.28 \quad 0.72]$$

- Nilai-nilai diatas adalah sama dengan yang kita peroleh jika kita menggunakan analisa diagram pohon dalam gambar 2. Probabilita keadaan berikutnya, dihitung dengan cara yang sama, ditunjukkan berikut ini :

Bulan 4 : [*Pn*(4) *Nn*(4)] = [0.31 0.69]

Bulan 5 : [*Pn*(5) *Nn*(5)] = [0.32 0.68]

Bulan 6 : [*Pn*(6) *Nn*(6)] = [0.33 0.67]

Bulan 7 : [*Pn*(7) *Nn*(7)] = [0.33 0.67]

Bulan 8 : [*Pn*(8) *Nn*(8)] = [0.33 0.67]

Bulan 9 : [*Pn*(9) *Nn*(9)] = [0.33 0.67]

- Seperti dalam kasus sebelumnya dimana Petroco merupakan keadaan awal, probabilita-probabilita keadaan ini dapat menjadi konstan setelah beberapa periode. Namun, perhatikan bahwa probabilita keadaan akhir (yaitu 0.33 dan 0.67) yang dicapai ketika National, ***persis sama*** dengan probabilita keadaan sebelumnya yang dicapai ketika Petroco merupakan keadaan awal. Dengan kata lain, probabilita yang berakhir pada keadaan tertentu di masa mendatang tidak tergantung pada keadaan awal.

Probabilita Keadaan-Tetap (*Steady-State*)

- Probabilita keadaan-tetap adalah probabilita rata-rata bahwa suatu sistem akan berada dalam keadaan tertentu setelah sejumlah besar periode transisi. Contoh : Probabilita sebesar 0.33 dan 0.67 dalam kasus diatas.
- Hal ini tidak berarti bahwa sistem tersebut tetap dalam satu keadaan. Ia akan terus berpindah dari keadaan satu ke keadaan lain di periode mendatang; namun, **probabilita** rata-rata perpindahan dari satu keadaan ke keadaan lain untuk seluruh periode tetap konstan dalam jangka panjang.
- Dalam proses Markov, setelah sejumlah periode berlalu, probabilita akan mencapai keadaan tetap (*steady-state*).
- Untuk contoh pompa bensin, probabilita keadaan-tetapnya adalah :

  0.33 = probabilita transaksi pelanggan dengan Petroco dalam sejumlah bulan di masa datang, tanpa tergantung dengan siapa pelanggan melakukan transaksi di bulan 1.

  0.67 = probabilita transaksi pelanggan dengan National dalam sejumlah bulan di masa datang, tanpa tergantung dengan siapa pelanggan melakukan transaksi di bulan 1.

– Dalam menentukan probabilita keadaan-tetap di atas, pertimbangkan setiap keadaan awal secara terpisah.

Pertama, asumsikan bahwa pelanggan pada awalnya melakukan transaksi dengan Petroco, dan probabilita keadaan tetap dihitung dengan memakai asumsi keadaan awal ini.

Kedua, tentukan bahwa probabilita kadaan tetap adalah sama tanpa tergantung pada kondisi awalnya.

Sebenarnya, tidak perlu melakukan operasi matriks ini secara terpisah, hanya menggabungkan operasi-operasi ini ke dalam satu matriks seperti berikut ini.

Bulan 2 : $$\begin{bmatrix} Pp(2) & Np(2) \\ Pn(2) & Nn(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Bulan 3 : $$\begin{bmatrix} Pp(3) & Np(3) \\ Pn(3) & Nn(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix}$$

Bulan 4 : $$\begin{bmatrix} Pp(4) & Np(4) \\ Pn(4) & Nn(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.31 & 0.69 \end{bmatrix}$$

Sampai akhirnya sampai pada probabilita keadaan-tetap.

Bulan 9 : $$\begin{bmatrix} Pp(9) & Np(9) \\ Pn(9) & Nn(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 \end{bmatrix}$$

Penentuan Probabilita Keadaan-Tetap Secara Aljabar Langsung

– Dalam bagian sebelumnya, probabilita keadaan-tetap untuk kedua keadaan dapat dicapai setelah probabilita keadaan dihitung sekitar delapan periode. Sebagai contoh,

Bulan 8 : $[P_p(8)\ N_p(8)] = [0.33\ \ 0.67]$

Bulan 9 : $[P_p(9)\ N_p(9)] = [0.33\ \ 0.67]$

- Jadi, probabilita keadaan pada periode *i* sama dengan probabilita keadaan pada periode *i* + 1. Untuk contoh diatas, berarti bahwa

  $[P_p(8)\ N_p(8)] = [P_p(9)\ N_p(9)]$

- Dalam kenyataannya, tidak perlu menunjuk periode mana di masa datang yang benar – benar terjadi. Maka, $[P_p\ \ N_p] = [P_p\ \ N_p]$, dengan asumsi kondisi keadaan-tetap.
- Probabilita-probabilita ini berlaku untuk beberapa periode *i* di masa datang begitu suatu saat keadaan tetap telah tercapai.
- Perhitungan untuk menentukan probabilita keadaan periode *i* + 1, sebagai berikut :

$$[Pp(i+1)\quad Np(i+1)] = [Pp(i)\quad Np(i)]\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Jika telah mencapai keadaan tetap, perhitungan yang digunakan yaitu :

$$[Pp(i+1)\quad Np(i+1)] = [Pp(i)\quad Np(i)]$$

dan tidak perlu menunjuk periode terjadinya. Oleh karena itu penghitungan dapat ditulis kembali sebagai

$$[Pp\quad Np] = [Pp\quad Np]\begin{bmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

Operasi Matriks akan menghasilkan persamaan berikut ini :

$P_p = 0.6P_p + 0.2N_p$

$N_p = 0.4P_p + 0.8N_p$

Ingat bahwa jumlah probabilita transisi untuk baris dalam matriks transisi (yaitu probabilita keadaan) harus sama dengan 1.0.

$P_p + N_p = 1.0$ atau $N_p = 1.0 - P_p$

Dengan memasukkan nilai ini ke persamaan pertama diatas ($P_p = 0.6P_p + 0.2N_p$), akan diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} P &= 0.6Pp + 0.2(1.0 - Pp) \\ &= 0.6Pp + 0.2 - 0.2Pp \\ &= 0.2 + 0.4Pp \\ 0.6Pp &= 0.2 \\ Pp &= 0.2/0.6 = 0.33 \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
Np &= 1.0 - Pp \\
&= 1.0 - 0.33 \\
&= 0.67
\end{aligned}
$$

– Kedua angka di atas merupakan probabilita keadaan-tetap (*steady-state*) dalam analisa terdahulu :

$$[Pp \quad Np] = [0.33 \quad 0.67]$$

Penerapan Probabilita Keadaan-Tetap

– Probabilita-probabilita *keadaan-tetap* tidak hanya menandakan probabilita transaksi seorang pelanggan pada sebuah pompa bensin tertentu dalam jangka panjang tetapi juga ***presentase pelanggan*** yang akan melakukan transaksi pada sebuah pompa bensin selama bulan tertentu dalam jangka panjang.

– Sebagai contoh, jika terdapat 3000 pembeli bensin dalam suatu komunitas, maka dalam jangka panjang jumlah ***ekspektasi*** berikut ini akan membeli bensin pada setiap pompa per bulannya.

Petroco : $P_p(3000) = 0.33(3000)$
$= 990$ pelanggan

National : $N_p(3000) = 0.67(3000)$
$= 2010$ pelanggan

– Sekarang anggaplah bahwa Petroco telah menetapkan bahwa ia memperoleh pangsa pasar lebih sedikit dari yang selayaknya sehingga ia ingin meningkatkan pangsa pasarnya. Untuk mencapai tujuan ini, Petroco telah meningkatkan pelayanannya, dan sebuah survei mengatakan bahwa probabilita transisi telah berubah menjadi seperti di bawah ini.

$$
\begin{array}{ll}
 & \textit{Bulan Berikutnya} \\
\textit{Bulan Pertama} & \begin{array}{cc} \textit{Petroco} & \textit{National} \end{array} \\
T = \text{Petroco} & \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix} \\
\quad\ \ \text{National} &
\end{array}
$$

– Dengan kata lain, peningkatan pelayanan tersebut telah menghasilkan probabilita yang lebih kecil (0.30) dimana pelanggan yang pada awalnya melakukan transaksi dengan Petroco akan berpindah ke National di bulan berikutnya.

– Probabilita keadaan-tetap berdasarkan matriks transisi yang baru

$$[Pp \quad Np] = [Pp \quad Np]\begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$$

$$Pp = 0.7Pp + 0.2Np$$
$$Np = 0.3Pp + 0.8Np$$

– Dengan menggunakan persamaan pertama dan kenyataan bahwa $N_p = 1.0 - P_p$, didapatkan

$$\begin{aligned} P &= 0.7Pp + 0.2(1.0 - Pp) \\ &= 0.7Pp + 0.2 - 0.2Pp \\ 0.5Pp &= 0.2 \\ Pp &= 0.2/0.5 = 0.4 \end{aligned}$$

dan oleh karena itu,

$$\begin{aligned} Np &= 1 - Pp \\ &= 1 - 0.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

– Hal ini berarti bahwa dari 3000 pelanggan tersebut, sekarang Petroco memperoleh 1200 pelanggan (yaitu 0.40 x 3000) pada bulan manapun dalam jangka panjang.

– Jadi, peningkatan dalam pelayanan akan menghasilkan peningkatan sebesar 210 pelanggan per bulan (jika probabilita transisi yang baru tetap konstan untuk jangka waktu yang lama di masa datang).

– Dalam situasi ini Petroco harus mengevaluasi ***untung-rugi pertukaran*** (*trade-off*) yang terjadi antara biaya peningkatan pelayanan dengan peningkatan laba yang diperoleh dari 210 pelanggan tambahan.

– Sebagai contoh, jika biaya peningkatan pelayanan adalah sebesar $1000 per bulan, maka 210 pelanggan tambahan harus dapat menghasilkan peningkatan laba yang lebih besar daripada $1000 agar keputusan peningkatan pelayanan tersebut dapat dibenarkan.

– Contoh ringkas ini memperlihatkan kegunaan analisa Markov dalam pengambilan keputusan. Walaupun analisa Markov tidak akan memberi rekomendasi keputusan (yaitu solusi), ia dapat memberikan informasi yang akan membantu pengambil keputusan untuk membuat keputusan.

Contoh Tambahan Analisa Markov

- Salah satu penerapan yang menonjol berhubungan dengan kerusakan mesin atau sistem (seperti sistem komputer, operasi produksi, atau sistem listrik). Sebagai contoh, sebuah mesin produksi dapat diberikan keadaan “operasi” dan “rusak”. Probabilita keadaan dapat mencerminkan probabilita mesin tersebut rusak atau beroperasi pada periode berikutnya (yaitu bulan, hari, atau tahun).
- Sebagai contoh, anggaplah sebuah mesin memiliki matriks transisi harian sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} & \textit{Hari 2} \\ \textit{Hari 1} & \begin{array}{cc} \textit{Operasi} & \textit{Rusak} \end{array} \\ T = \begin{array}{l} \text{Operasi} \\ \text{Rusak} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.90 & 0.10 \\ 0.70 & 0.30 \end{bmatrix} \end{array}$$

Probabilita-probabilita *keadaan-tetap* untuk contoh ini adalah :

0.88 = probabilita keadaan-tetap beroperasinya mesin

0.12 = probabilita keadaan-tetap kerusakan mesin

- Sekarang jika manajemen menetapkan bahwa probabilita jangka panjang kerusakan mesin sebesar 0.12 terlalu besar, ia dapat mempertimbangkan peningkatan perawatan prefentif, yang akan mengubah matriks transisi untuk contoh ini. Keputusan untuk meningkatkan perawatan akan didasarkan pada biaya peningkatan tersebut terhadap nilai dari peningkatan keluaran yang diperoleh akibat kerusakan mesin yang lebih sedikit.
- Contoh, The Carry-All Rental Truck Firm, yang melayani tiga negara bagian Virginia, North Carolina, dan Maryland. Truk-truk disewa dengan dasar harian dan dapat disewa dan dikembalikan di negara manapun dari tiga negara bagian tersebut. Matriks transisi untuk contoh ini adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{ll} \textit{Disewa} & \textit{Dikembalikan} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Virginia} & \text{Maryland} & \text{North Carolina} \end{array} \\ T = \begin{array}{l} \text{Virgnia} \\ \text{Maryland} \\ \text{North Carolina} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.60 & 0.20 & 0.20 \\ 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.40 & 0.10 & 0.50 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Probabilita-probabilita keadaan-tetap untuk contoh ini ditentukan dengan menggunakan pendekatan aljabar yang sama seperti yang telah disajikan, namun tahap matematikanya lebih panjang dan kompleks. Lagipula kali ini terdapat empat persamaan yang harus diselesaikan sekaligus.

– Probabilita-probabilita keadaan-tetap untuk contoh ini adalah

$$\begin{array}{ccc} \textit{Virginia} & \textit{Maryland} & \textit{North Carolina} \\ [0.471 & 0.244 & 0.285] \end{array}$$

– Jadi, dalam jangka panjang, truk milik Carry-All akan berhenti di tiga negara bagian tersebut dengan presentase sebesar di atas. Jika perusahaa memiliki 200 truk, ia dapat memperkirakan truk sejumlah di bawah ini akan tersedia di masing-masing negara bagian pada setiap saat di masa datang.

$$\begin{array}{ccc} \textit{Virginia} & \textit{Maryland} & \textit{North Carolina} \\ [94 & 49 & 57] \end{array}$$

Jenis Khusus Dari Matriks Transisi

– Beberapa matriks memiliki karakteristik tertentu yang mengubah metode normal analisa Markov. Walaupun analisa mendetil atas kasus-kasus khusus ini berada di luar ruang lingkup bab ini, akan diberikan contoh-contoh agar matriks-matriks tersebut dapat mudah dikenali.

– Dalam matriks transisi

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .40 & .60 & 0 \\ .30 & .70 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

keadaan 3 disebut keadaan ***sementara*** (*transient state*). Apabila keadaan 3 telah dicapai, sistem tersebut tidak akan kembali ke keadaan tersebut. keadaan 1 dan 2 memiliki probabilita sebesar 0.0 untuk kembali ke keadaan 3. Sistem tersebut akan keluar dari keadaan 3 ke keadaan 1 (dengan probabilita sebesar 1.0) tetapi tidak akan kembali lagi ke keadaan 3.

– Matriks transisi berikut ini disebut ***putar*** (*cyclic*).

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .40 & .60 \\ .30 & .70 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistem tersebut akan berputar membentuk lingkaran antara keadaan 1 dan 2 tanpa bergerak keluar lingkaran tersebut.

– Terakhir, lihat matriks transisi untuk keadaan 1, 2, dan 3 berikut ini.

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .30 & .60 & 10 \\ .40 & .40 & 20 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Keadaan 3 dalam matriks transisi ini disebut sebagai *absorbing* atau *trapping state* (***keadaan terserap*** atau terjebak). Apabila keadaan 3 telah dicapai, terdapat probabilita sebesar 1.0 bahwa keadaan tersebut akan tercapai dalam beberapa periode waktu berturut-turut. Oleh karena itu, sebagai akibatnya sistem tersebut akan berhenti saat keadaan 3 dicapai. Tidak ada pergerakan dari suatu keadaan terserap; apa yang sedang terjadi terjebak dalam keadaan itu.

Contoh Hutang

– Sebuah penerapan matriks keadaan terserap yang unik dan populer adalah contoh hutang tak tertagih (*bad debt*). Dalam contoh ini, keadaan yang ada adalah bulan-bulan dimana pelanggan berhutang. Pelanggan dapat membayar (yaitu tagihan) setiap saat dan oleh karenanya mencapai suatu keadaan terserap untuk melakukan pembayaran. Walaupun demikian, jika pelanggan berhutang lebih lama dari sejumlah periode tertentu, hutang tersebut akan dianggap "buruk" dan akan dipindahkan ke penagih hutang. Keadaan "hutang tak tertagih" juga merupakan keadaan terserap. Melalui berbagai manipulasi matriks, bagian dari piutang yang akan dibayar dan yang akan menjadi tak terbayar dapat ditentukan.

– Contoh hutang akan diperagakan dengan menggunakan matriks transisi berikut, yang menggambarkan piutang bagi Perusahaan A to z Office Supply.

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ 1 \\ 2 \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & 1 & 2 & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ .70 & 0 & .30 & 0 \\ .50 & 0 & 0 & .50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Dalam matriks transisi keadaan terserap ini, keadaan p menandakan bahwa hutang telah dibayar, keadaan 1 dan 2 menandakan bahwa hutang telah berusia satu atau dua bulan, dan keadaan b menandakan bahwa hutang telah menjadi buruk (tak tertagih).
- Ketika hutang telah dibayar (yaitu ketika memasuki keadaan p), probabilita perpindahan ke keaadan 1, 2, atau b adalah nol. Jika hutang berusia satu bulan, terdapat probabilita sebesar .70 bahwa ia akan dibayar dalam bulan berikutnya dan probabilita sebesar .30 bahwa hutang tersebut akan berusia 2 bulan dengan keadaan belum terbayar. Jika hutang berada dalam bulan 2, terdapat probabilita sebesar .50 bahwa ia akan dibayar dan probabilita sebesar .50 bahwa hutang tersebut menjadi tidak terbayar di periode berikutnya. Akhirnya, jika hutang menjadi tak terbayar, tidak terdapat probabilita bahwa hutang tersebut akan kembali ke keadaan sebelumnya.
- Langkah selanjutnya dalam analisa masalah Markov ini adalah mengatur kembali matriks transisi ke dalam bentuk berikut ini.

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ b \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & b & 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline .70 & 0 & 0 & .30 \\ .50 & .50 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

- Kemudian, matriks transisi tersebut dibagi menjadi empat bagian, atau sub matriks, yang ditandai sebagai berikut :

$$T = \left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline R & Q \end{array}\right]$$

dimana

$$I = \begin{array}{c} \\ p \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \text{matriks identitas}$$

$$0 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \text{suatu matriks dari nol}$$

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} .70 & 0 \\ .50 & .50 \end{bmatrix} \end{array}$$

= matriks yang berisi probabilita transisi dari hutang yang terserap (*absorbed*) ke periode berikutnya

$$Q = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & .30 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

= matriks yang berisi probabilita transisi untuk pergerakan di antara kedua keadaan tak terserap (*non absorbing*)

- Matriks bertanda I adalah sebuah ***matriks identitas***, disebut demikian karena memiliki angka satu sepanjang diagonal dan nol di sisi lain matriks.
- Operasi matriks pertama yang dilakukan adalah menentukan ***matriks fundamental*** *F*, sebagai berikut

  $F = (I - Q)^{-1}$
- Notasi untuk memangkatkan matriks *(I – Q)* dengan pangkat –1 menunjukkan apa yang disebut sebagaik ***kebalikan*** (*inverse*) dari sebuah matriks. Matriks fundamental dihitung dengan mengambil kebalikan dari perbedaan antara matriks identitas, I, dan Q. Untuk perhitungan contoh di atas, matriks fundamental dihitung sebagai berikut.

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & .30 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -.30 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & .30 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Matriks fundamental menandakan jumlah yang diharapkan keberadaan sistem dalam keadaan ***tak terserap*** (*non absorbing*) sebelum penyerapan terjadi. Oleh karena itu, berdasarkan *F*, jika pelanggan dalam keadaan 1 (terlambat 1 bulang dalam pembayaran hutang), perkiraan bahwa pelanggan akan terlambat 2 bulan adalah .30 sebelum hutang dibayar atau menjadi buruk.

– Selanjutnya matriks fundamental dikalikan dengan matriks *R* yang dibuat ketika matriks transisi asli diikutsertakan.

$$F \,.\, R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & .30 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \;.\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} .70 & 0 \\ .50 & .50 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} .85 & .15 \\ .50 & .50 \end{bmatrix} \end{array}$$

– Matriks F x R mencerminkan probabilita bahwa hutang pada akhirnya akan terserap, dengan keadaan awal manapun. Sebagai contoh, jika hutang saat ini berada dalam bulan pertama, terdapat probabilita sebesar .85 bahwa pada akhirnya hutang tersebut akan dibayar dan probabilita sebesar .14 bahwa hutang tersebut akan menjadi tak terbayar.

– Sekarang, anggap Perusahaan A to Z Office Supply memiliki piutang sebesar \$4000 dalam bulan 1 dan \$6000 dalam bulan 2. Untuk menentukan berapa bagian dari dana ini yang dapat ditagih dan berapa bagian yang akan menjadi hutang tak tertagih, kalikan matriks dalam jumlah dolar ini dengan matriks F x R.

$$\text{Penentuan piutang} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4000 & 6000 \end{bmatrix} \end{array} \;.\; \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} .85 & .15 \\ .50 & .50 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6400 & 3600 \end{bmatrix} \end{array}$$

– Maka, dari jumlah \$10,000 yang terhutang, perusahan peralatan kantor tersebut dapat memperkirakan sebesar \$6400 dan \$3600 akan menjadi hutang tak tertagih.