Pertemuan 5

ANALISIS RANTAI MARKOV

Objektif:

1. Mahasiswa dapat merumuskan masalah dalam analisis rantai markov
2. Mahasiswa dapat mencari penyelesaian masalah dalam prorses perhitungan probabilitas dengan menggunakan Matriks
3. Mahasiswa dapat menyusun probabilitas transisi dan probabilitas tree

P5.1 Pendahuluan

A. Pengertian Analisis Markov

Beberapa penjelasan mengenai pengertian analisis markov :

1. Analisa Rantai Markov adalah suatu metode yang mempelajari sifat-sifat suatu variabel pada masa sekarang yang didasarkan pada sifat-sifatnya di masa lalu dalam usaha menaksir sifat-sifat variabel tersebut dimasa yang akan datang.
2. Analisis Markov adalah suatu teknik matematik untuk peramalan perubahan pada variable-variabel tertentu berdasarkan pengetahuan dari perubahan sebelumnya.

Model Rantai Markov dikembangkan oleh seorang ahli Rusia A.A. Markov pada tahun 1896. Dalam analisis markov yang dihasilkan adalah suatu informasi probabilistik yang dapat digunakan untuk membantu pembuatan keputusan, jadi analisis ini bukan suatu teknik optimisasi melainkan suatu teknik deskriptif . Analisis Markov merupakan suatu bentuk khusus dari model probabilistik yang lebih umum yang dikenal sebagai proses Stokastik (*Stochastic process*).

Kata stokastik (*stochastics*) merupakan jargon untuk keacakan. Oxford Dictionary menakrifkan **proses stokastik** sebagai suatu barisan kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang. Hull menyatakan bahwa setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu (dalam ketidakpastian) dikatakan mengikuti proses stokastik. Dengan demikian, jika dari pengalaman yang lalu keadaan yang akan datang suatu barisan kejadian dapat diramalkan secara pasti, maka barisan kejadian itu dinamakan deterministik. Sebaliknya jika pengalaman yang lalu hanya dapat menyajikan struktur peluang keadaan yang akan datang, maka barisan kejadian yang demikian disebut stokastik.

Konsep dasar analisis markov adalah *state* dari sistem atau *state* transisi, sifat dari proses ini adalah apabila diketahui proses berada dalam suatu keadaan tertentu, maka peluang berkembangnya proses di masa mendatang hanya tergantung pada keadaan saat ini dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya, atau dengan kata lain rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang bersyarat kejadian yang akan datang tergantung pada kejadian sekarang.

Analisis Markov ini sangat sering digunakan untuk membantu pembuatan keputusan dalam bisnis dan industri, misalnya dalam masalah ganti merek, masalah hutang-piutang, masalah operasi mesin, analisis pengawasan dan lain-lain. **Informasi yang dihasilkan tidak mutlak menjadi suatu keputusan, karena sifatnya yang hanya memberikan bantuan dalam proses pengambilan keputusan.**

B. Probabilitas Transisi dan Contoh Kasus

Probabilitas Transisi adalah perubahan dari satu status ke status yang lain pada periode (waktu) berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 1 berikut ini :

Tabel 1 : Matriks kemungkinan transisi

Dari keadaan	Pindah ke keadaan ke :					
Ke :	1	2	. .	j	. .	n
1	p11	p12	. .	p1j	. .	p1
2	p21	p22	. .	p2j	. .	n
.	.	.	. .	.	. .	p2n
i	pi1	pi2	. .	pij	. .	.
	.	.	. .	.	. .	pin
.	pn1	pn2	. .	pnj	. .	.

n adalah jumlah keadaan dalam proses dan $_{pij}$ adalah kemungkinan transisi dari keadaan saat i ke keadaan j. Jika saat ini berada pada keadaan i maka baris i dari tabel di atas berisi angka-angka pi1, pi2, , pin merupakan kemungkinan berubah ke keadaan berikutnya. Oleh karena angka tersebut melambangkan kemungkinan, maka semuanya melupakan bilangan non negatif dan tidak lebih dari satu. Secara matematis :

$0 < p_{ij} < 1 \qquad i = 1, 2, ..., n$

$\Sigma\, p_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, ..., n$

Contoh :

Pada suatu kota kecil terdapat dua pasar swalayan W dan L. Diasumsikan setiap pembeli di kota tersebut melakukan kunjungan belanja satu kali per minggu. Dalam sembarang minggu seorang pembeli hanya berbelanja di W atau di L saja, dan tidak di keduanya. Kunjungan belanja disebut percobaan (trial) dari proses dan toko yang dipilih disebut keadaan dari proses. Suatu sampel 100 pembeli diambil dalam periode 10 minggu, kemudian data dikompilasikan.

Dalam menganalisis data, terlihat bahwa dari seluruh pembeli yang berbelanja di W dalam suatu minggu, 90 persen tetap berbelanja di toko W pada minggu berikutnya, sedangkan sisanya berpindah belanja pada toko L. 80 persen dari yang berbelanja di toko L dalam suatu minggu tetap berbelanja di toko L sedangkan 20 persen berpindah belanja pada toko W. Informasi tersebut disusun pada tabel 2 berikut :

Pilihan pada suatu minggu	**Pilihan minggu berikutnya**	
	W	**L**
W	90	10
L	20	80

Tabel 2 : Matriks kemungkinan transisi

Pada kedua baris berjumlah 100, tetapi jumlah kolom tidak. Informasi ini digunakan untuk membuat matriks kemungkinan perpindahan keadaan / transisi.

Didefinisikan :

Keadaan 1 : Pembeli berbelanja di

W Keadaan 2 : Pembeli berbelanja

di L

Dengan demikian matriks kemungkinan transisinya adalah :

Pilihan pada suatu minggu	Pilihan minggu berikutnya	
	W	**L**
W	90/100 = 0.9	10/100 = 0.1
L	20/100 = 0.2	80/100 = 0.2

Tabel 3 : Probabilitas Transisi

Terlihat bahwa kemungkinan dari setiap baris berjumlah satu.

C. Syarat-Syarat Dalam Analisa Markov

Untuk mendapatkan analisa rantai markov ke dalam suatu kasus, ada beberapa syarat yang harus dipenuhi, adalah sebagai berikut:

1. Jumlah probabilitas transisi untuk suatu keadaan awal dari sistem sama dengan 1.
2. Probabilitas-probabilitas tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
3. Probabilitas transisi konstan sepanjang waktu.
4. Kondisi merupakan kondisi yang independen sepanjang waktu.

Penerapan analisa markov bisa dibilang cukup terbatas karena sulit menemukan masalah yang memenuhi semua sifat yang diperlukan untuk analisa markov, terutama persyaratan bahwa probabilitas transisi harus konstan sepanjang waktu (probabilitas transisi adalah probabilitas yang terjadi dalam pergerakan perpindahan kondisi dalam sistem).

D. Probabilitas Tree dan Contoh Kasus

Probabilitas Tree merupakan **cara yang mudah untuk menggambarkan sejumlah terbatas transisi dari suatu proses Markov**.

Agar lebih jelas kita masih akan mengambil contoh kasus seperti di bawah ini :

Sebuah perusahaan transportasi mempunyai 220 unit mobil. Namun tidak semua mobil dapat beroperasi dikarenakan mesin rusak. Data mobil yang sedang beroperasi(narik) dan rusak(mogok) adalah sebagai berikut :

Status saat ini	**Banyaknya mobil**	
	Hari 1	**Hari 2**
Narik	120	144
Mogok	100	76
Jumlah	220	220

Dalam waktu dua hari ini terdapat perubahan, mobil yang beroperasi ternyata mengalami kerusakan, dan sebaliknya. Untuk mengetahui perubahan yang terjadi dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Hari l	**Hari II**		**Jumlah**
	Narik	**Mogok**	
Narik	70	50	120
Mogok	74	26	100
Jumlah	144	76	220

Dari data tersebut hitunglah :

a. Probabilitas transisi
b. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 narik
c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik
d. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 mogok
e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok

Jawaban :

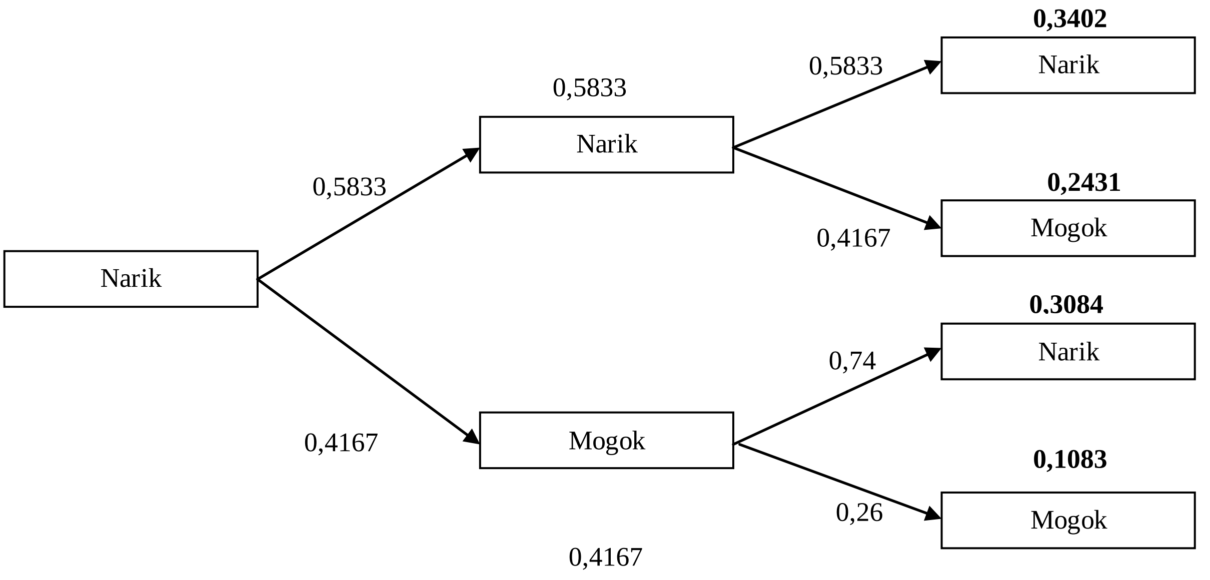
a. Probabilitas Transisi

Hari I	Hari II	
	Narik	**Mogok**
Narik	70/120= **0,5833**	50/120 = **0,4167**
Mogok	74/100 = **0,74**	26/100 = **0,26**

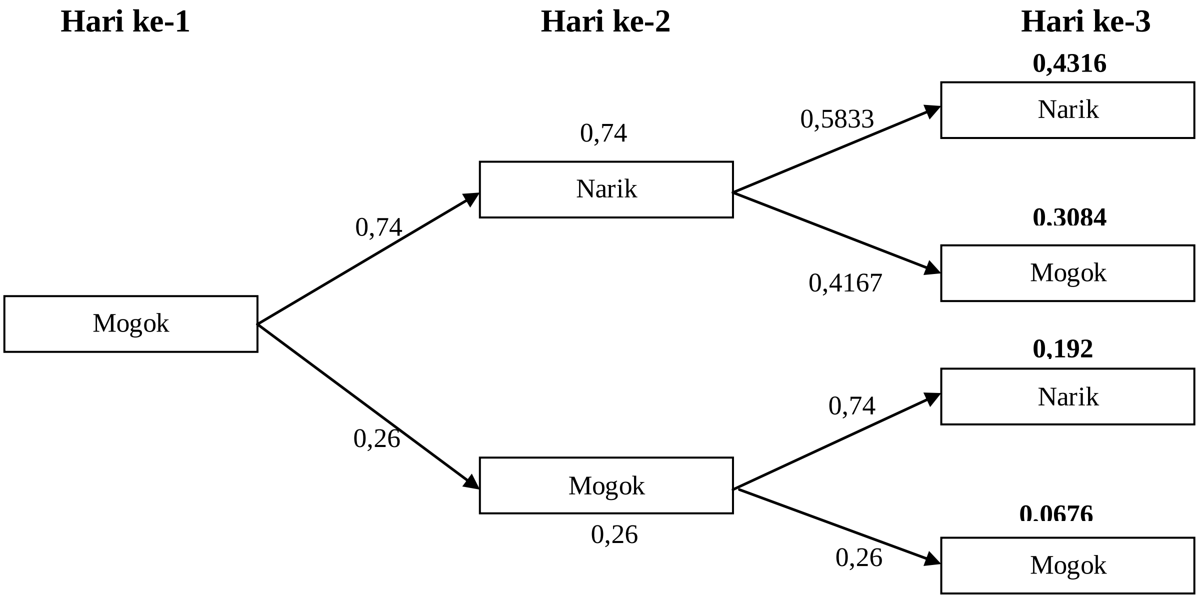
(Untuk jawaban b-e lihat diagram pohon di bawah ini)

Jika Hari ke 1 NARIK :

Hari ke-1 **Hari ke-2** **Hari ke-3**



Probabilitas Tree jika hari ke-1 NARIK



Probabilitas Tree jika hari ke-1 MOGOK

Dari 2 gambar tersebut, kita bias menjawab jawab soal di atas, sehingga :

b. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 narik = 0,3402 + 0,3084 = **0,6486**

c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik = 0,2431 + 0,1083 = **0,3514**

d. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 mogok = 0,4316 + 0,1924 = **0,624**

e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok = 0,3084 + 0,0676 = **0,376**

E. Pendekatan Matriks dan Contoh Kasus

Ada kalanya kita harus mencari probabilitas pada periode yang sangat besar, misalkan periode hari ke-9, ke-10 dan seterusnya, akan sangat menyulitkan dan membutuhkan media penyajian yang khusus jika kita menggunakan Probabilitas Tree. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Pendekatan Matriks Probabilitas.

Adapun Matriks Probabilitas dari contoh kasus di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-i jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

Probabilitas Narik → **Nn(i)** ← **Periode ke-i**

↑

Status Awal Narik

Probabilitas kendaraan mogok pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 mogok, dilambangkan dengan:

Probabilitas Mogok → **Mm(3)** ← **Periode ke-3**

↑

Status Awal Mogok

Jika kendaraan pada hari ke-1 narik maka berlaku probabilitas sebagai berikut:

Nn(l) = 1 sedangkan Mm(l) = 0

Jika probabilitas di atas disusun ke dalam vektor baris, maka kita dapatkan:

(**Nn(l)   Mm(l)) = (l   0)**

Adapun rumus untuk mencari probabilitas periode berikutnya (i+1) adalah:

(Nn(i+1)   Mn(i+1)) = (Nn(i)   Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Bila rumus di atas kita gunakan untuk mencari probabilitas hari ke-2, maka:

$$(Nn(2)\quad Mn(2)) = (Nn(1)\quad Mn(1)) \begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{vmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

$$= (0{,}5833 \quad 0{,}4167)$$

Terlihat bahwa hasilnya sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode Probabilities Tree. Dengan menggunakan cara yang sama kita akan dapatkan status untuk periode-periode berikutnya sebagai berikut:

$$(Nn(3)\quad Mn(3)) = (0{,}6486 \quad 0{,}3514)$$

$$(Nn(4)\quad Mn(4)) = (0{,}6384 \quad 0{,}3616)$$

$$(Nn(5)\quad Mn(5)) = (0{,}6400 \quad 0{,}3400)$$

(Nn(6) Mn(6)) = (0,6397 0,3603)

(Nn(7) Mn(7)) = (0,6398 0,3602)

(Nn(8) Mn(8)) = (0,6398 0,3602)

Terlihat bahwa perubahan probabilitas semakin lama semakin mengecil sampai akhirnya tidak tampak adanya perubahan. Probabilitas tersebut tercapai mulai dari periode ke-7, dengan probabilitas status:

(Nn(7) Mn(7)) = (0,6398 0,3602)

Ini berarti pemilik kendaraan dapat menarik kesimpulan bahwa jika awalnya kendaraan berstatus narik, setelah beberapa periode di masa depan probabilitasnya narik adalah sebesar 0,6398 dan probabilitasnya mogok adalah sebesar 0,3602.

Untuk perhitungan probabilitas status hari pertama mogok dapat kita cari dengan metode yang sama dan akan kita dapatkan probabilitas yang akan sama untuk periode selanjutnya, mulai dari periode ke-8. Adapun probabilitas pada periode ke-8 adalah:

(Nm(8) Mm(8)) = (0,6398 0,3602)

F. Probabilitas Steady State dan Contoh Kasus

Dalam banyak kasus, proses markov akan menuju pada Steady State (keseimbangan) artinya setelah proses berjalan selama beberapa periode, probabilitas yang dihasilkan akan bernilai tetap, dan probabilitas ini dinamakan Probabilitas Steady State. Dari contoh di atas Probabilitas Steady Statenya adalah probabilitas narik sebesar 0,6398 dan probabilitas mogok sebesar 0,3602.

Untuk mencari Probabilitas Steady State dari suatu Matriks Transisi, maka kita dapat menggunakan rumus:

(Nn(i+1) Mn(i+1)) = (Nn(i) Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Karena Steady State akan menghasilkan probabilitas yang sama pada periode ke depan maka rumus tersebut akan berubah menjadi:

(Nn(i) Mn(i)) = (Nn(i) Mn(i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Dari contoh kasus di atas dengan status hari ke-1 narik, maka kita dapatkan:

$$\begin{vmatrix} 0,5833 & 0,4167 \\ 0,74 & 0,26 \end{vmatrix}$$

Untuk mengurangi keruwetan, periode (i) dapat kita hilangkan, karena pada saat Steady State tercapai periode tidak akan mempengaruhi perhitungan. Sehingga perhitungan di atas akan menjadi:

$$\mathbf{(Nn \quad Mn) = (Nn \quad Mn) \times \begin{vmatrix} 0,5833 & 0,4167 \\ 0,74 & 0,26 \end{vmatrix}}$$

Dari perhitungan di atas akan menghasilkan persamaan berikut:

Nn = 0,5833Nn + 0,74Mn................................ (1)

Mn = 0,4167Nn + 0,26Mn .... (2)

Karena salah satu ciri proses markov adalah:

Nn(i) + Mn(i) = 1, maka:

Nn + Mn = 1 $\Leftrightarrow$ Mn = 1 - Nn

Dengan menstubstitusikan Mn = 1 -Nn ke persamaan (1) didapatkan:

Nn = 0,5833Nn + 0,74(l-Nn)

Nn = 0,5833Nn + 0,74 - 0,74Nn

l,1567Nn = 0,74

Nn = 0,6398

Lalu kita masukkan nilai Nn = 0,6398 ke dalam persamaan (2) didapatkan:

Mn = 0,3602

<u>Penggunaan Probabilitas Steady State</u>

Dari contoh kasus kita ketahui bahwa Pemilik Kendaraan memiliki 220 kendaraan. Dengan menggunakan Probabilitas Steady State yang sudah kita dapatkan, Pemilik dapat mengharapkan jumlah kendaraan setiap harinya narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,6398 x 220= 140,756 atau sebanyak 141 kendaraan

Mogok : Mn x 220 = 0,3602 x 220= 79,244 atau sebanyak 79 kendaraan

Misalkan Pemilik kurang puas dengan tingkat operasi yang ada dan ingin meningkatkannya, sehingga Pemilik mengambil kebijakan untuk menggunakan suku cadang asli dalam setiap perawatan armada. Kebijakan ini membuat Matriks Probabilitas Transisi berubah menjadi:

$$\begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Artinya kebijakan ini membuat Probabilitas saat ini narik, lalu hari berikutnya mogok menurun dari 0,4 menjadi 0,3. Probabilitas Steady State yang baru adalah:

$$(Nn \quad Mn) = (Nn \quad Mn) \times \begin{vmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{vmatrix}$$

Sehingga kita adpatkan persamaan berikut:

Nn = 0,7Nn + 0,74Mn……………………(1)

Mn = 0,3Nn + 0,26Mn……………………(2)

Substitusikan Nn = 1 - Mn ke persamaan (2), sehingga kita dapatkan:

Mn = 0,2885 dan Nn = 0,7116

Artinya setiap harinya Pemilik dapat mengharapkan kendaraan yang narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,7116 x 220 = 156,55 atau sebanyak 157 kendaraan

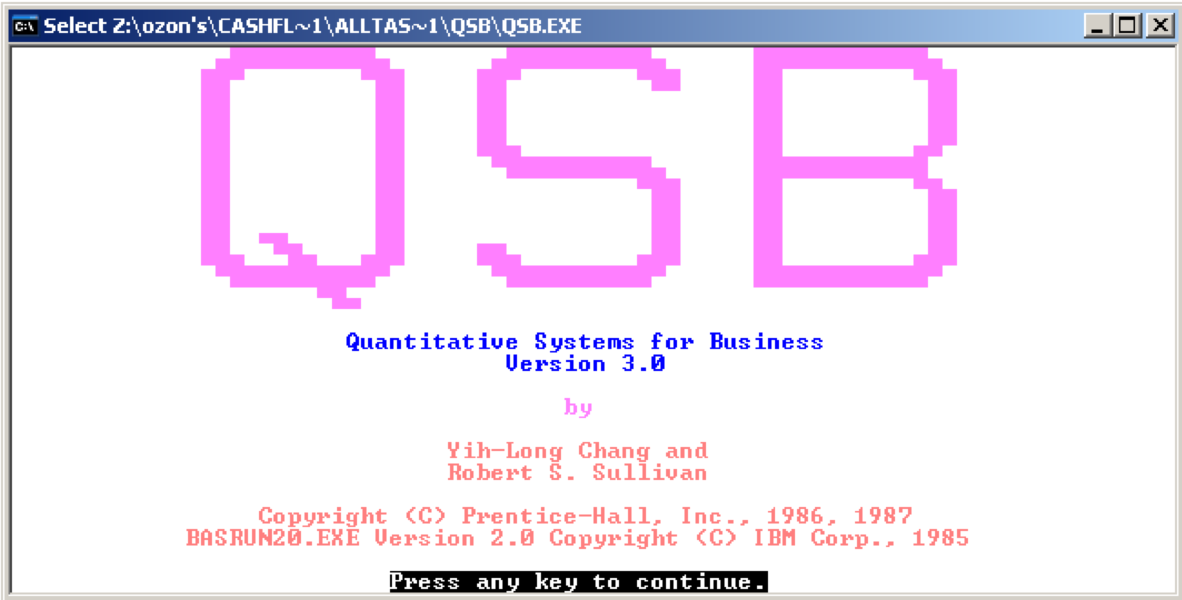
Mogok : Mn x 220 = 0,2885 x 220 = 63,47 atau sebanyak 63 kendaraan

Kebijakan tersebut menghasilkan kenaikan operasional dari 141 kendaraan perhari menjadi 157 kendaraan perhari. Dalam hal ini Pemilik harus mengevaluasi kebijakan ini, apakah kenaikan pendapatan operasional dapat menutupi kenaikan biaya operasional karena kebijakan ini. Misalkan karena kebijakan ini terjadi kenaikan biaya perawatan kendaraan sebesar Rp. 1.000.000,- setiap harinya. Jadi bila kenaikan pendapatan operasional lebih besar dari Rp. 1.000.000,- maka kebijakan tersebut layak untuk dijalankan.

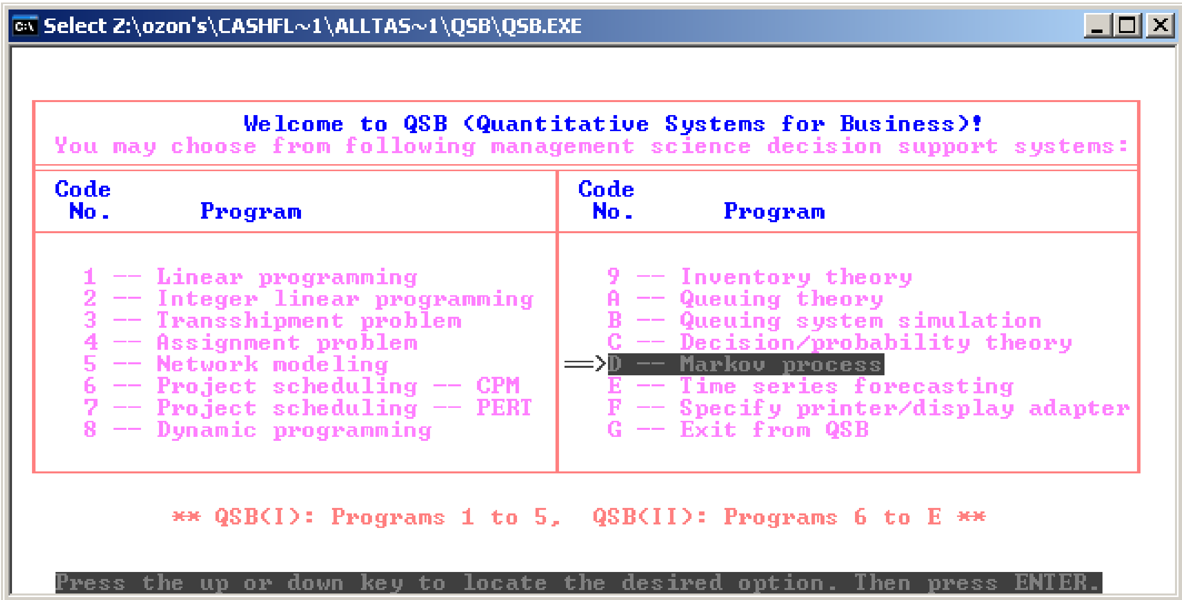
Dari contoh ini menunjukkan bahwa Analisis Markov tidak memberikan solusi atau keputusan, namun analisis tersebut memberikan informasi yang dapat membantu pembuatan keputusan.

P5.2 Aplikasi Software QSB

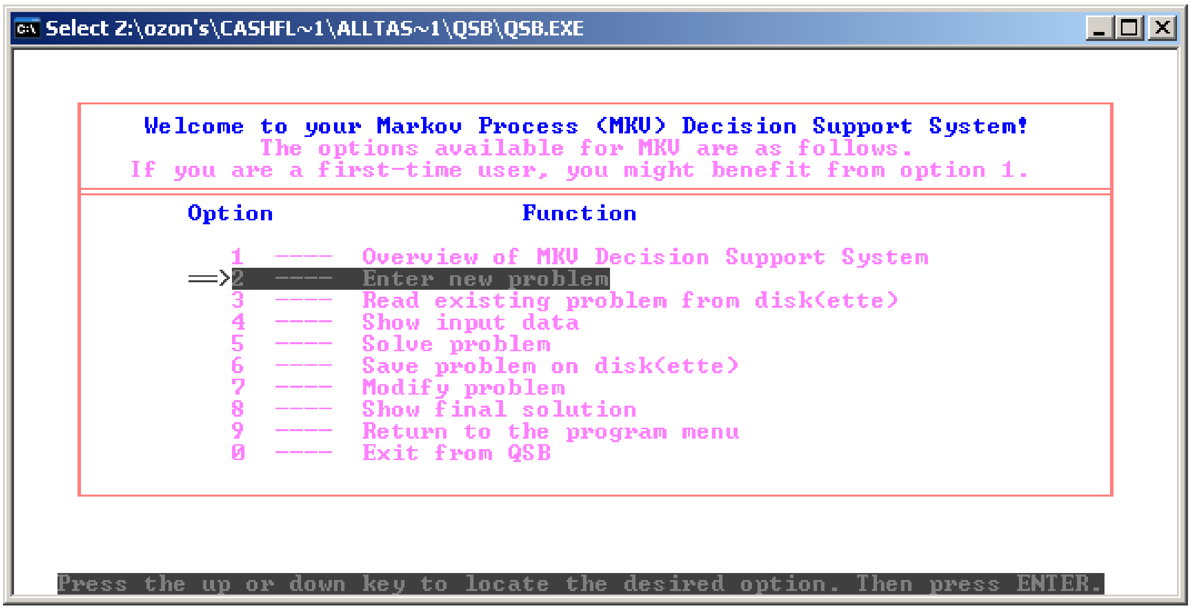
1. Buka software QSB



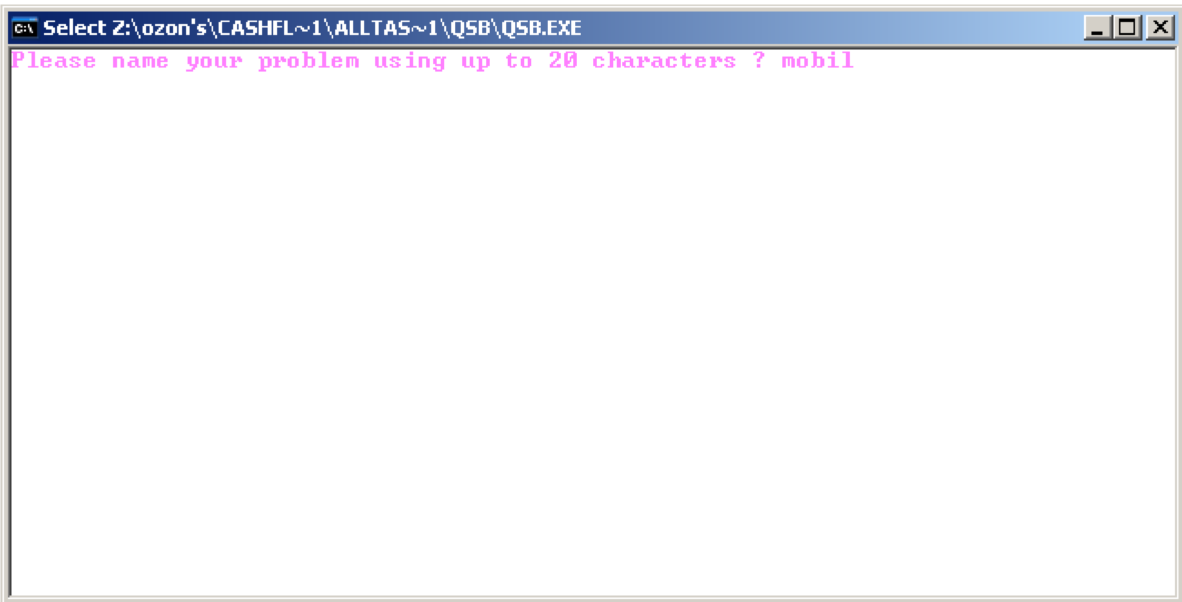
2. Di Enter sampai ke menu utama, lalu pilih Markov Process (bisa dengan mengklik huruf D satu kali)



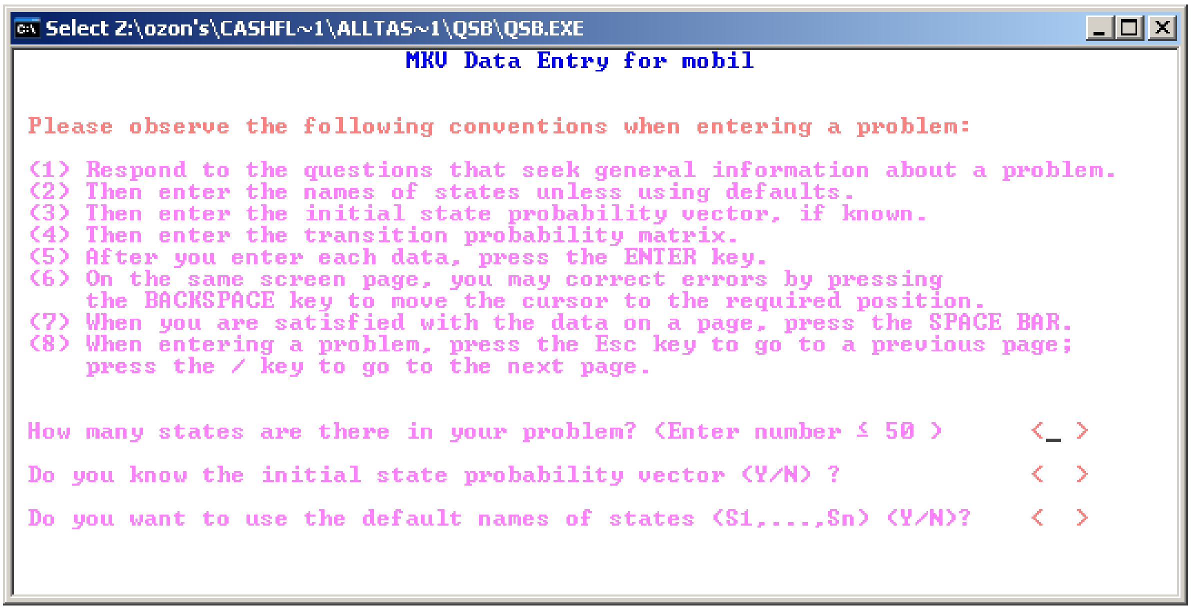
3. Lalu akan masuk ke pilihan menu, pilih Enter New Problem (masukan nama suatu masalah yang ingin di selesaikan, sembarang nama pun taka apa)



Misal namanya adalah ‘mobil’, lalu enter

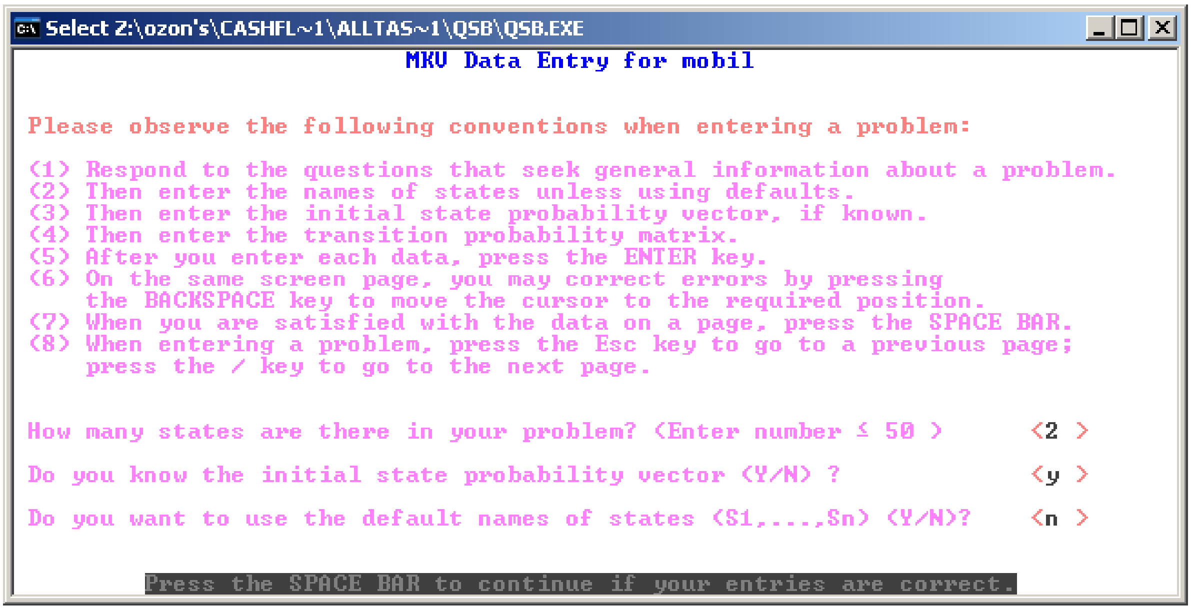


. Maka akan muncul tampilan seperti ini



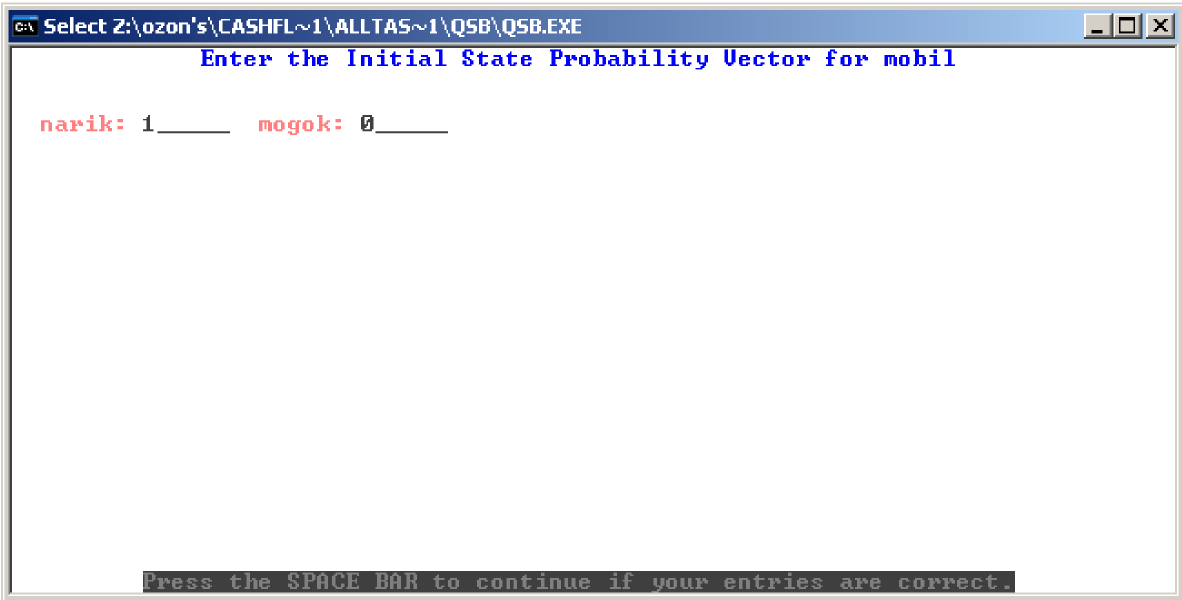
Keterangan untuk pengisian

- Untuk pertanyaan ‘how many states….’ Tuliskan ada berapa kondisi yang di alami.(dalam contoh ada 2, yaitu narik dan mogok)
- Untuk pertanyaan ‘do yo know…’, di tulis huruf ‘Y’ yang berarti ya. Ini menunjukkan keadaan di awal, nanti akan di isi angka 1 dan 0. Untuk lebih jelasnya akan di jelaskan pada langkah ke 6.
- Untuk pertnyaan ‘do you want…’, pilih ‘Y’ jika ingin menggunakan nama default, atow ‘N’ untuk di tulis ulang. Disini akan digunakan huruf ‘N’. lalu tekan space bar.

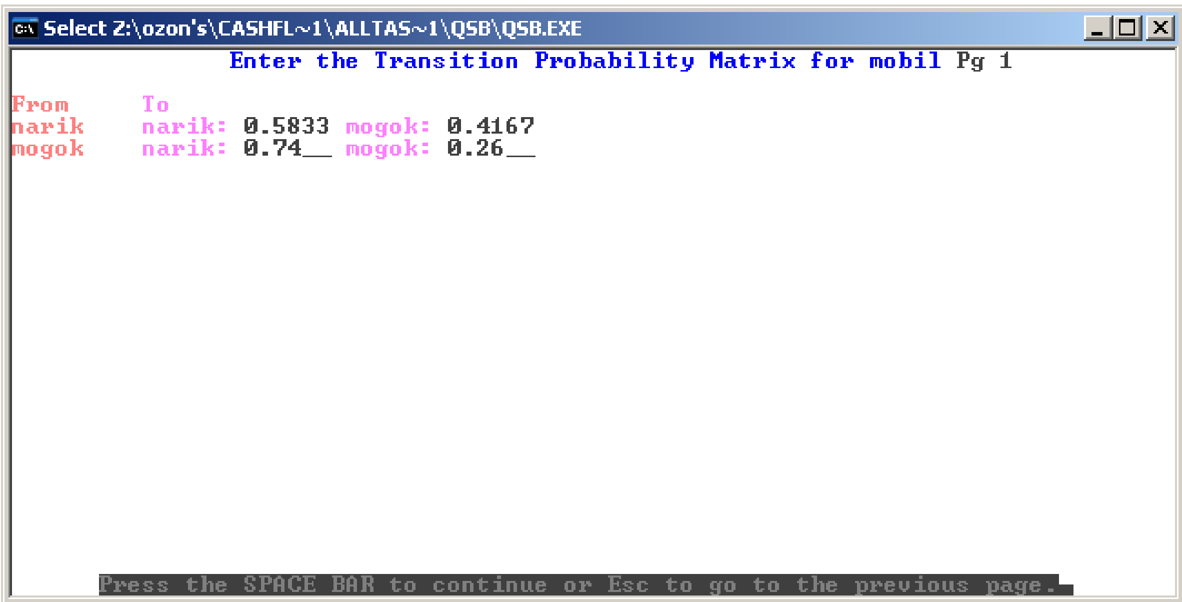


5. Karena memilih ‘N’ pada langkah sebelumnya, maka kit harus menulis ulang statenya. Lalu tekan space bar.

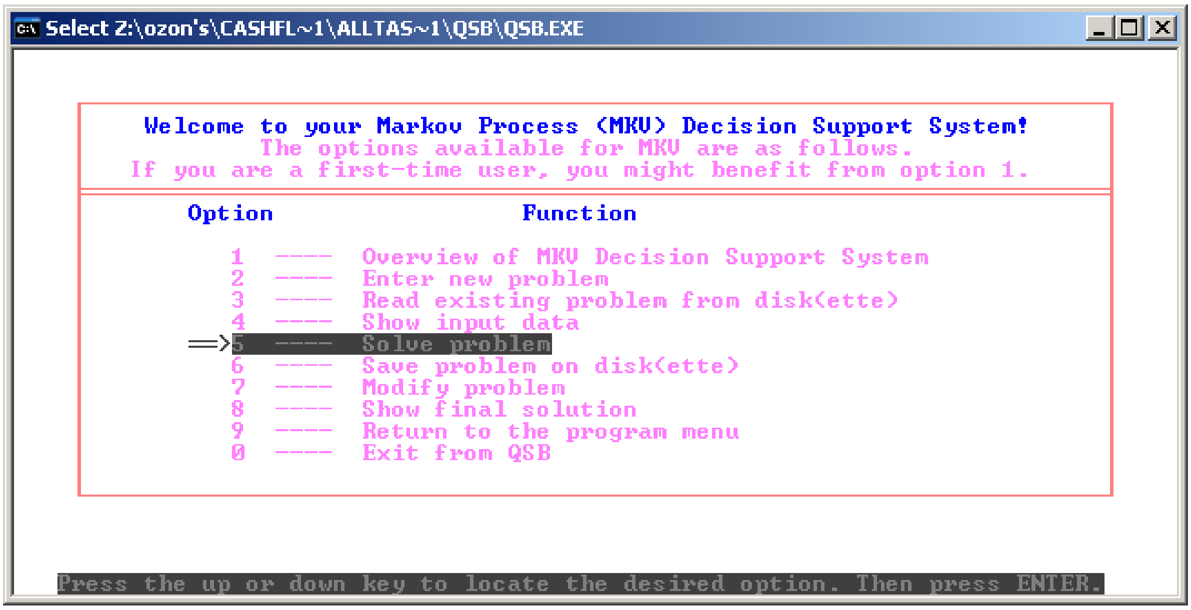
6. Inilah penjelasan untuk langkah ke 4. Kita harus mengisikan probabilitas vector pada kolom ini(jumlah probabilitas harus 1), yaitu keadaan di waktu paling awal. Jika mengisikan seperti di bawah ini, maka artinya keadaan mobil di hari pertama adalah narik(untuk menjawab pertanyaan b dan c). Jika sebaliknya yaitu narik 0 dan mogok 1, maka artinya keadaan mobil di hari pertama adalah mogok (untuk menjawab pertanyaan d dan e). Disini akan dimulai dengan keadaan hari pertama mobil adalah narik.



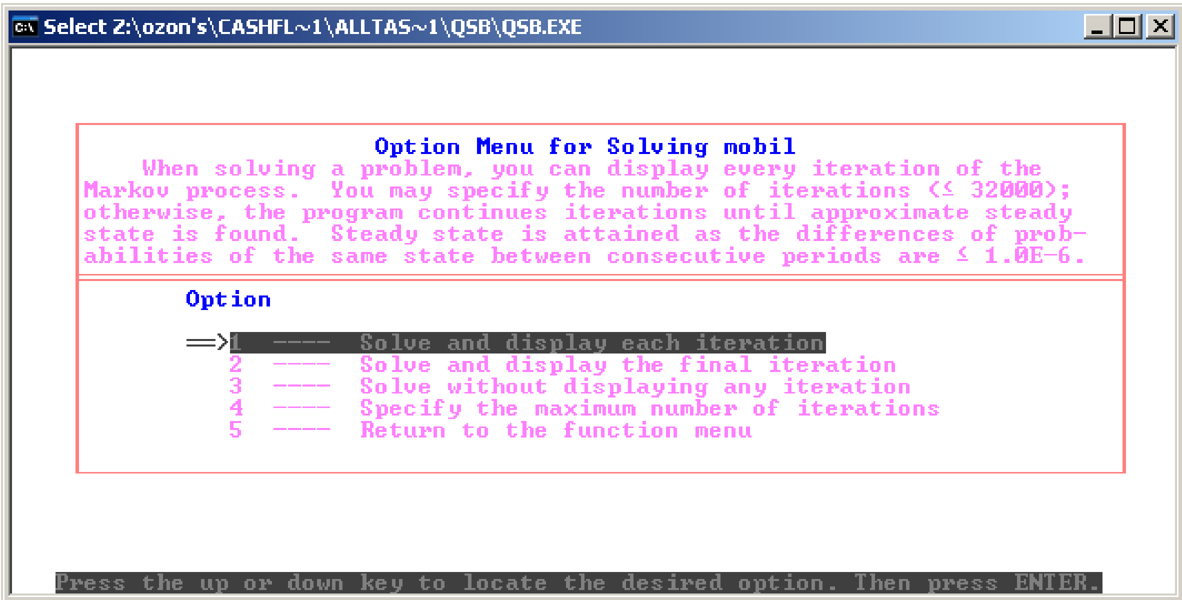
7. Isikan probabilitas transisinya (jangan sampai terbalik). Lalu tekan space bar.



8. Setelah itu akan kembali ke menu function. Pilih solve problem untuk mengetahui jawaban, tekan enter.

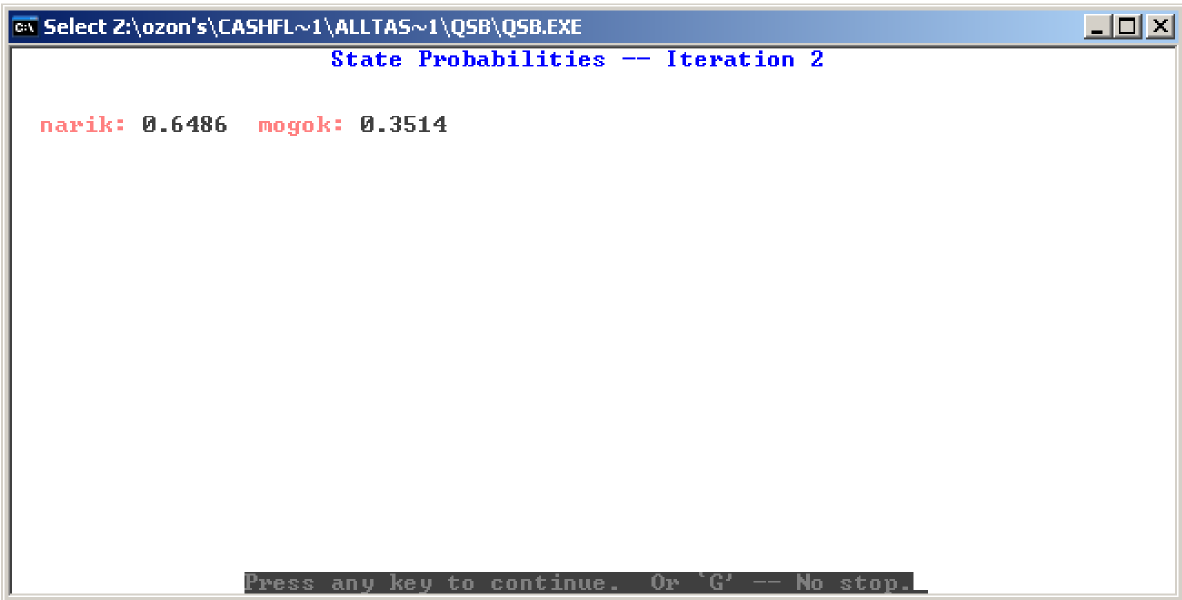


9. Lalu akan muncul tampilan menu option. Pilih option no. 1, lalu enter.

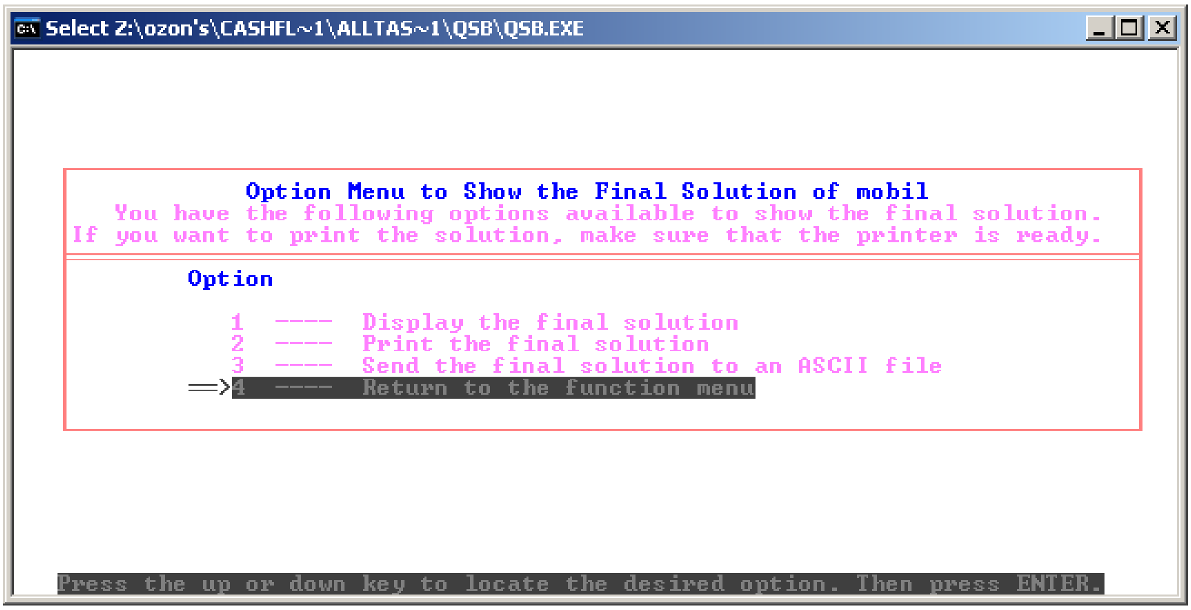


Maka akan muncul hasilnya. Untuk tampilan pertama, itu adalah probabilitas keadaan mobil pada hari pertama jika hari pertama narik. Bila di tekan enter lagi, maka akan diketahui probabilitas hari selanjutnya jika hari pertama naik.

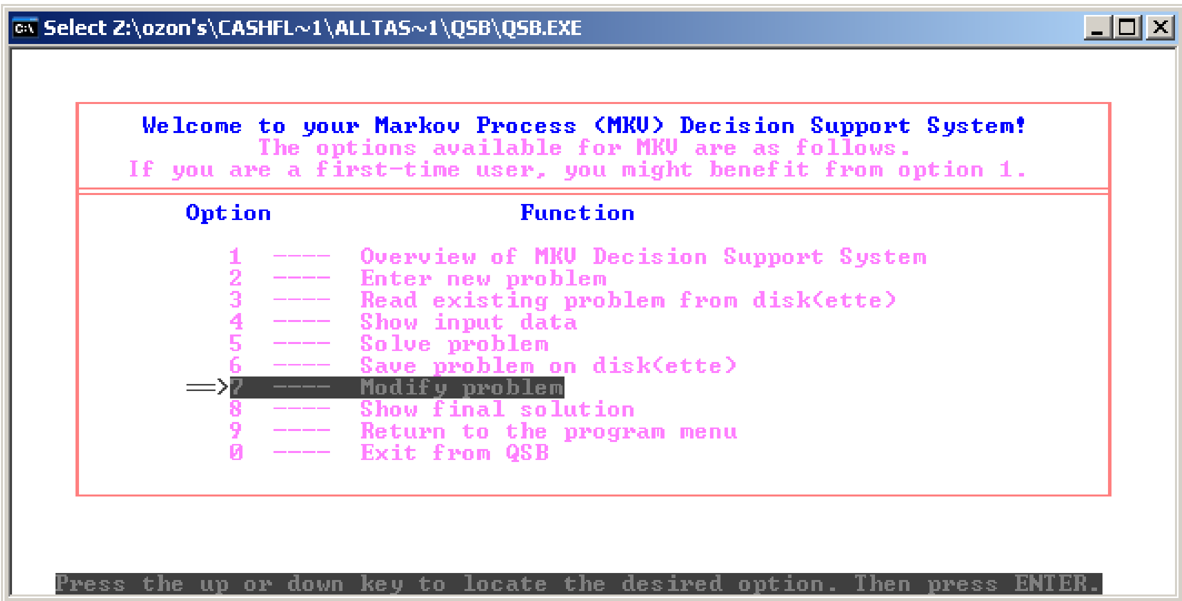
11. Ini adalah probabilitas hari ke 3 jika hari pertama narik. (jawaban b dan c).



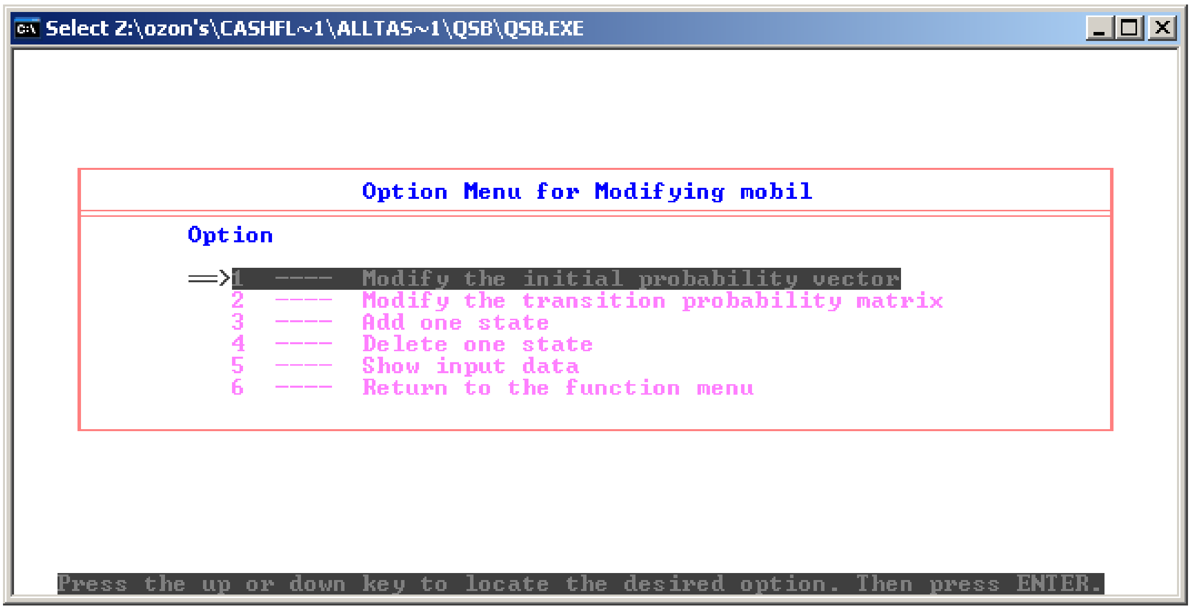
Untuk menjawab pertanyaan d dan e, harus memodifikasi inputan data probabilitas vektornya. Caranya setelah langkah ke 11, enter terus sampai muncul tampilan seperti di bawah ini. Lalu pilih no.4, enter.



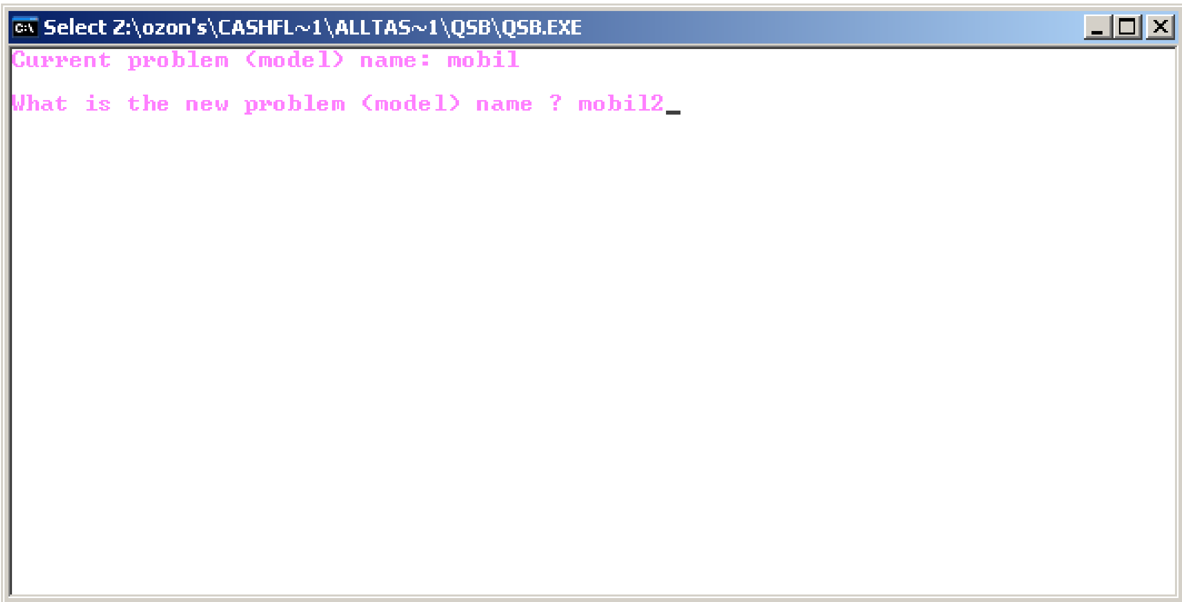
13. Akan kembali ke tampilan function. Kita pilih no.7, enter.



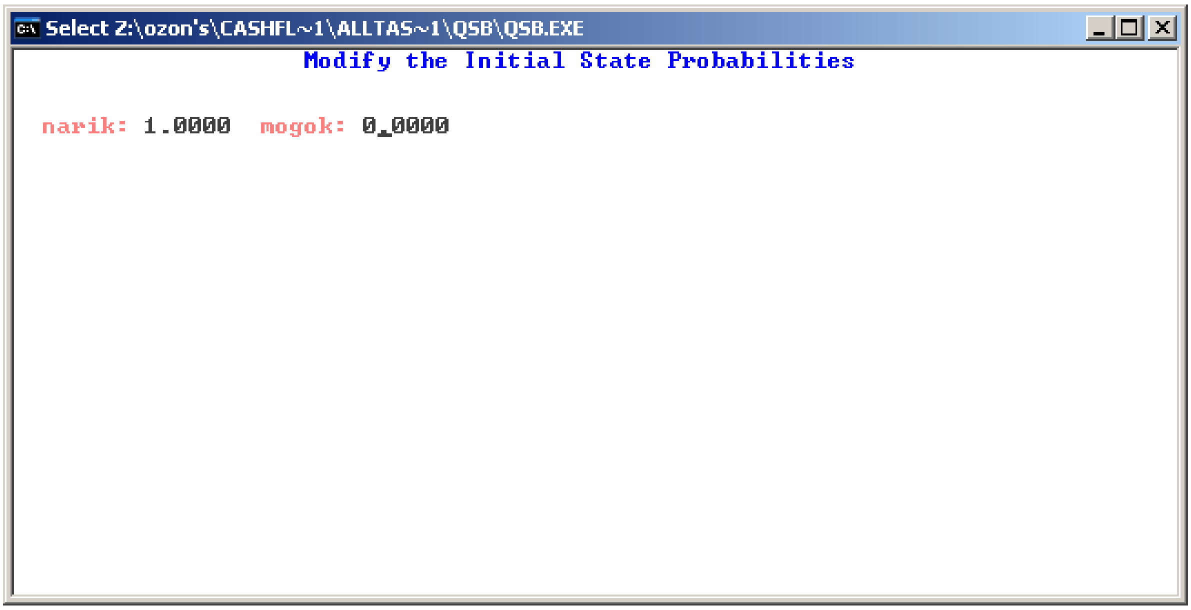
Lalu pilih no.1, enter.



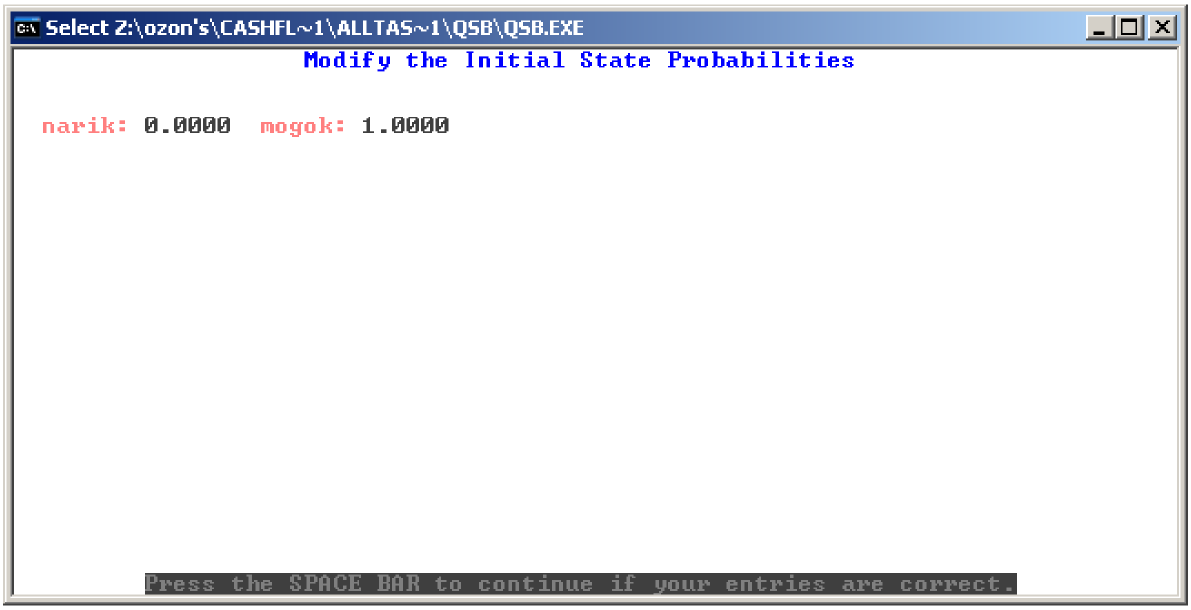
15. Disini anda diminta untuk memasukkan nama baru untuk masalahnya, tekan enter. (bias di isi bebas)



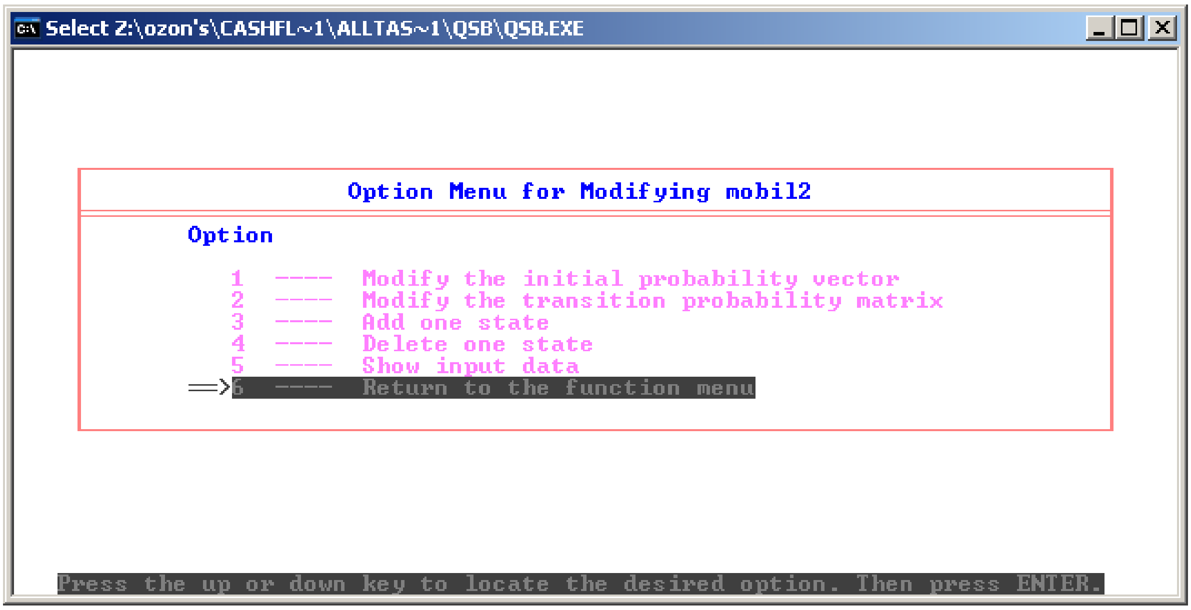
16. Akan muncul tampilan seperti di bawah. Ini adalah probabilitas vector jika hari pertama narik.



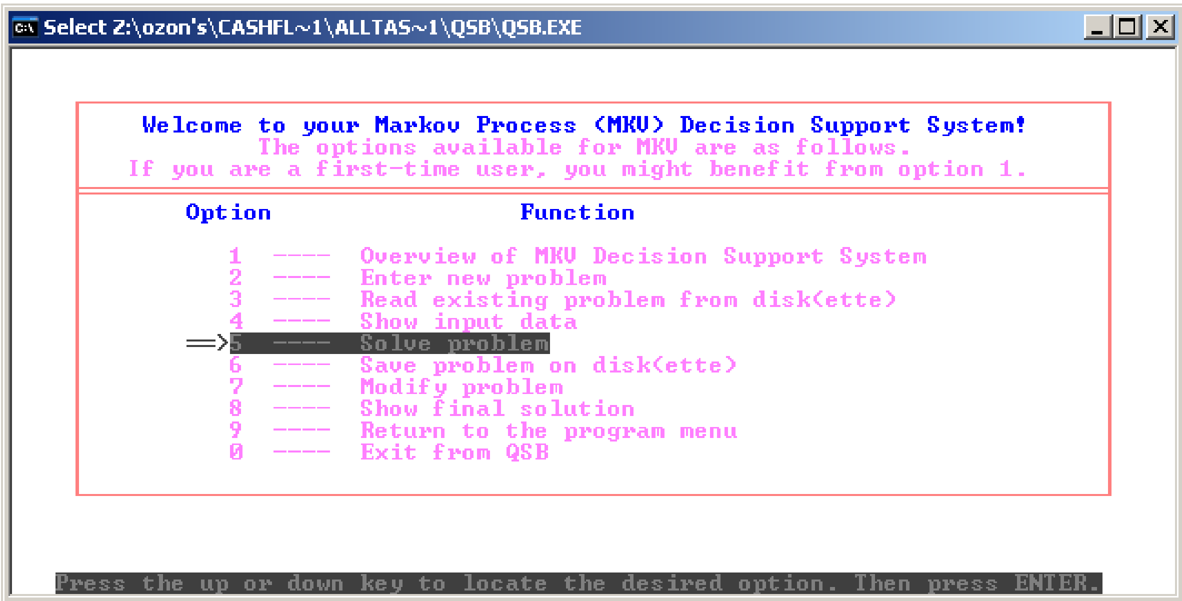
17. Karena kita ingin mengganti dengan probabilitas jika hari pertama mogok, maka harus di ganti menjadi seperti di bawah ini.



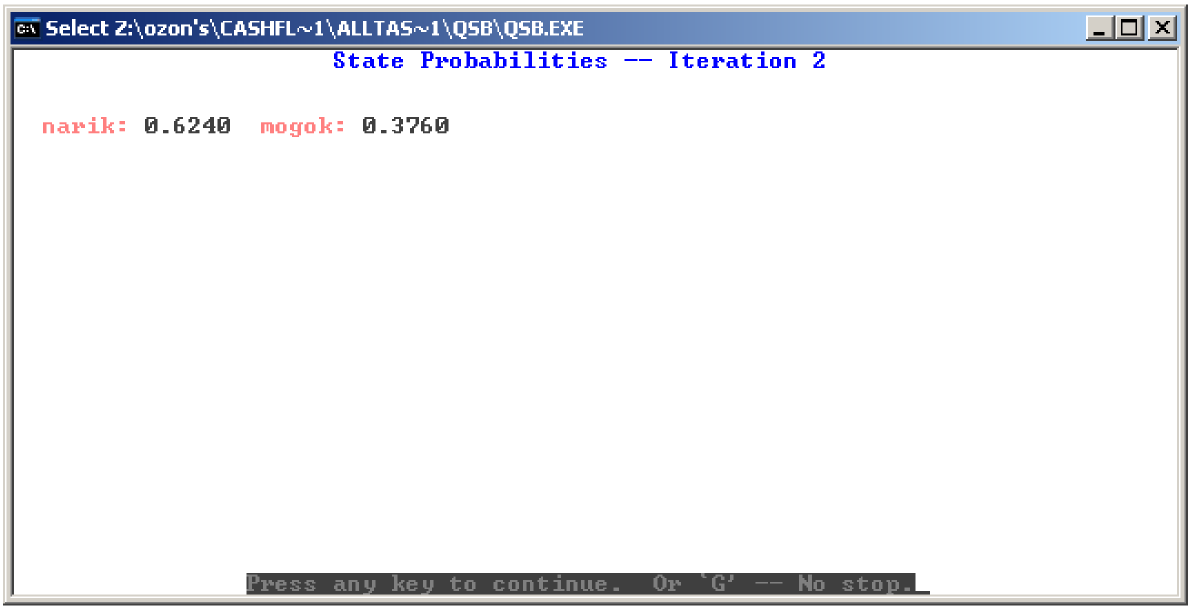
Setelah itu, kembali ke function menu dengan memilih no. 6, tekan enter.



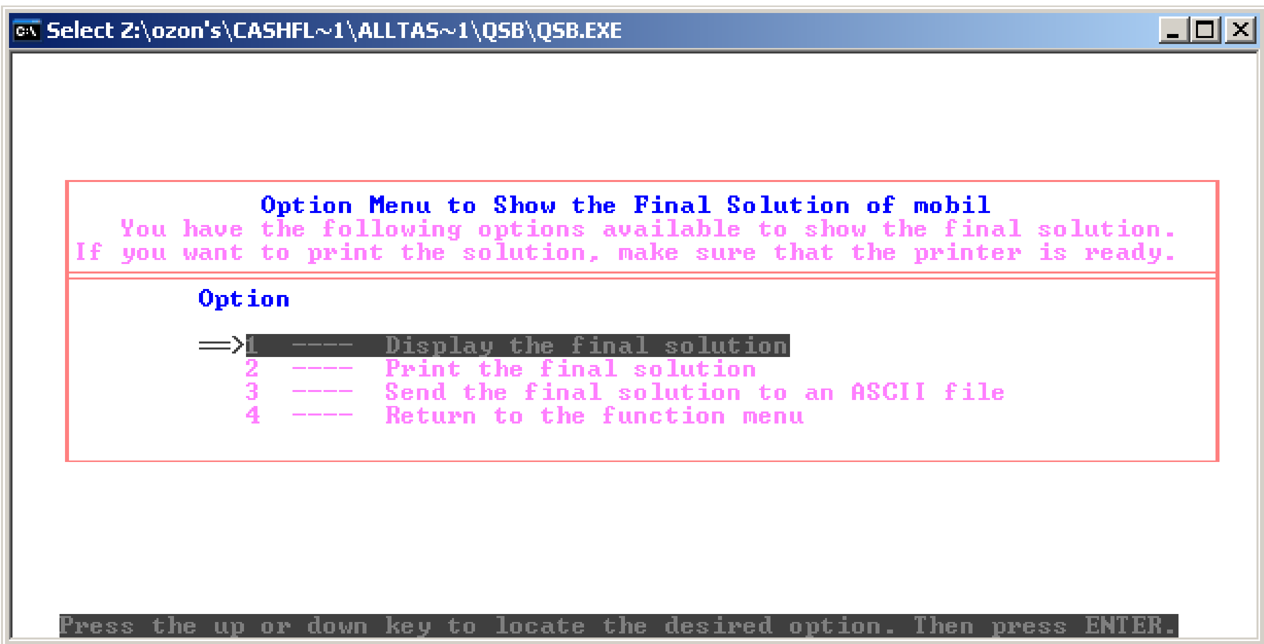
19. Ulangi langkah 8 dan 9.



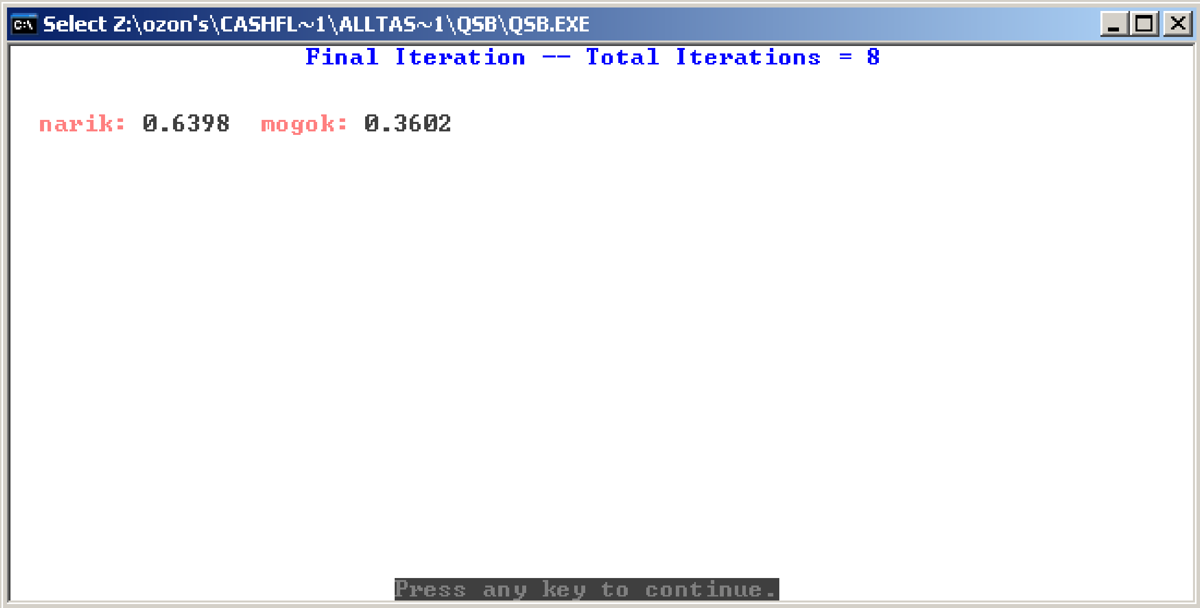
. Ulangi langkah 10 dan 11. (ini adalah jawaban d dan e)



21. Jika ingin melihat probabilitas stedy state, di enter terus sampai muncul tampilan seperti ini. Lalu pilih no. 1 dan tekan enter



22. Maka akan terlihat probabilitas ketika keadaan stedy state



P5.3 Daftar Pustaka

Abdurachman Edi, Konsep Dasar Markov Chain serta kemungkinan penerapannya di Bidang Pertanian, *Journal Inform atika Pertanian Volume 8*, Desember 1999

Djan, Ismulyana. dan Ruvendi, Ramlan. 2006. Prediksi perpindahan merek handphone di kalangan mahasiswa. Jurnal Ilmiah Binaniaga. Vol. 2 (1)

http://fajarbax89.blogspot.com/2009/10/sejarah-penggunan-markov-chain.html. Diakses tanggal 23 Februari 2012.

http://rachmadresmi.blogspot.com/2009/12/proses-stokastik.html. Diakses tanggal 23 Februari 2012.

Rambe, A. Jabbar M. 2005. Teknik Analisa Rantai Markov dalam Analisa Posisi dan Perpindahan Fungsi Produk Sejenis. Jurnal Sistem Teknik Industri. Vol. 6 (5): hal. 1-4.