Modul Kuliah ke 10
TPK

Model Antrian

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami struktur sistem antrian
2. Memahami model antrian single.
3. Memahami model multi antrian

I. Struktur Sistem Antrian

Model antrian ini dikembangkan untuk membantu manajer memahami dan membuat keputusan yang lebih baik dalam pengoperasian jalur antrian. Dalam terminologi ilmu manajemen, baris antrian dikenal juga sebagai antrian, dan dalam pengetahuan yang berurusan dengan barisan antrian adalah dikenal sebagai teori antrian. Pada awal 1900-an, A.K. Erlang, seorang insinyur telepon Denmark, memulai studi tentang kemacetan dan waktu tunggu yang terjadi dalam penyelesaian panggilan telepon. Sejak itu, teori antrian telah berkembang jauh lebih canggih, dengan aplikasi dalam dalam berbagai macam situasi jalur antrian.

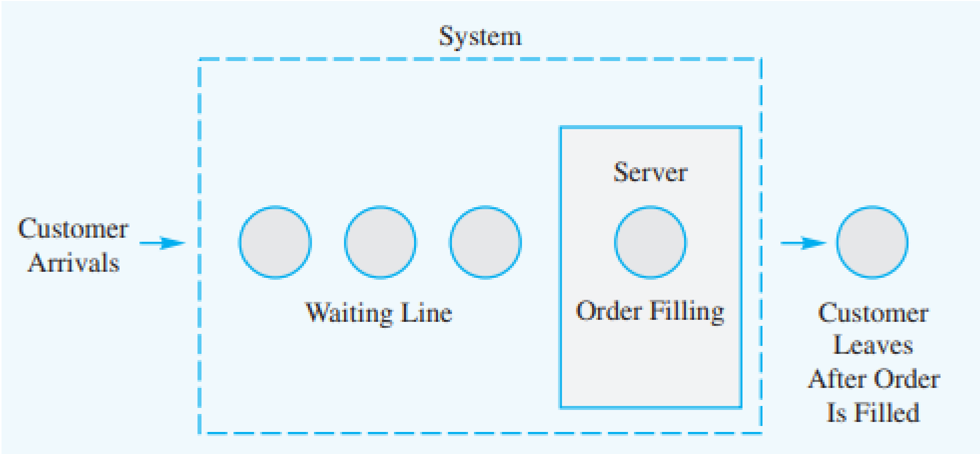
Model jalur antrian terdiri dari rumus matematika dan hubungan yang dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi (ukuran kinerja) untuk jalur antrian. Karakteristik operasi yang menarik termasuk :

1. Probabilitas bahwa tidak ada unit pada sistem
2. Rata-rata jumlah unit pada jalur antrian
3. Rata-rata jumlah unit pada sistem (jumlah unit pada jalur antrian ditambah jumlah unit yang dilayani)
4. Waktu rata-rata unit menghabiskan waktu pada jalur antrian
5. Waktu rata-rata unit menghabiskan di sistem (waktu pada jalur antrian ditambah waktu pada layanan (service)).
6. Probabilitas pada kedatangan unit yang menunggu untuk diservice

Antrian biasanya dapat terjadi pada jenis usaha layanan misalnya restoran, layanan bank, rumah sakit, pom bensin, tranportasi, dan lain sebagainya. Meskipun jenis-jenis usaha tersebut ining melayani setiap pelanggan dengan segera, tetapi kadang-kadang pelanggan lebih banyak yang datang daripada yang dapat dilayani, sehingga menimbulkan suatu antrian yang menunggu sebelum dapat dilayani. Pelaku-pelaku usaha bisnis ini biasanya khawatir kalau metode antrian yang dijalankan dapat pelanggan menunggu lama yang berlebihan untuk dapat dilayani sehingga antrian yang lama dapat menjadi penyebab kemungkinan hilangnya pelanggan. Dari masalah tersebut, maka pihak manajemen harus melakukan studi mengenai jalur antrian ini untuk membantu dalam menentukan pendekatan terbaik dalam mengurangi waktu tunggu dan meningkatkan layanannya.

a. Jalur antrian dengan satu layanan (Single-Server Waiting Line)

Model antrian ini biasanya pelanggan membentuk satu jalur antrian yang menunggu sampai dapat dilayani pada satu layanan (server). Struktur jalur satu antrian dengan satu layanan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1. Single server waiting line

b. Distribusi kedatangan

Distribusi kedatangan merupakan proses kedatangan yang menenpati jalur antrian termasuk dalam penentuan distribusi probabilitas pada jumlah kedatangan dalam periode waktu tertentu. Biasanya kedatangan terjadi secara random dan independen dari kedatangan yang lain dan kita tidak dapat memprediksi berapa jumlah kedatangan akanterjadi. Dalam kasus seperti itu distribusi probabilitas poisson dapat memberikan deskripsi yang baik pada pola kedatangan. Probabilitas poisson dapat berfungsi memberikan probabilitas dari x kedatangan dalam waktu periode tertentu. Rumus fungsi probabilitas poisson adalah sebagai berikut:

$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ Untuk x = 0,1,2, …

Dimana :

x = jumlah kedatangan dalam periode waktu

λ = rata-rata jumlah tingkat kedatangan per periode waktu

e = 2,71828

Contoh 1

Sebuah toko burger menganalisis data pada kedatangan customer dengan tingkat kedatangan adalah 45 orang per jam.Dalam periode satu menit tingkat kedatangannya menjadi

45 orang / 60 menit = 0,75 customer per menit.

Dari kasus, berapa probabilitas poisson-nya?

Jawaban

Kita dapat menggunakan rumus fungsi probabilitas poisson untuk mencari probabilitas poisson dari x customer yang datang dalam satu menit seperti berikut:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0{,}75^x e^{-0{,}75}}{x!}$$

Dari rumus tersebut kita dapat mencari probabilitas dengan nilai x = 1, x = 2, dan x = 3 seperti berikut ini:

$$P(0) = \frac{0{,}75^0 e^{-0{,}75}}{0!} = e^{-0{,}75} = 0{,}4724$$

$$P(1) = \frac{0{,}75^1 e^{-0{,}75}}{1!} = 0{,}75\ e^{-0{,}75} = 0{,}75(0{,}4724) = 0{,}3543$$

$$P(2) = \frac{0{,}75^2 e^{-0{,}75}}{2!} = \frac{(0{,}5625)(0{,}4724}{2} = 0{,}1329$$

Hasil dari perhitungan tersebut maka:

- Probabilitas tidak ada customer dalam periode satu menit adalah 0,4724.
- Probabilitas satu customer dalam periode satu menit adalah 0,3543.
- Probabilitas dua customer dalam periode satu menit adalah 0,1329.

c. Distribusi dari waktu layanan

Waktu layanan adalah waktu yang dihabiskan pelanggan pada saat dilayani begitu layanan tersebut dimulai. Contoh pada sebuah restoran, waktu layanan dimulai ketika pelanggan mulai melakukan pemesanan dengan karyawan dan berlanjut sampai pelanggan menerima pesanan. Waktu layanan adalah jarang konstan, jumlah item yang dipesan dan campuran item yang dipesan sangat bervariasi dari satu pelanggan ke pelanggan berikutnya. Pesanan sedikit dapat ditangani dalam waktu yang cepat dalam hitungan detik, tetapi pesanan banyak mungkin membutuhkan lebih dari dua menit.

Jika distribusi probabilitas untuk waktu layanan dapat diasumsikan mengikuti distribusi probabilitas eksponensial, rumus tersedia untuk memberikan informasi yang berguna mengenai pengoperasian jalur antrian. Menggunakan distribusi probabilitas eksponensial, maka probabilitas waktu layanan akan kurang dari atau sama dengan waktu t adalah:

$$P(service\ time\ \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Dimana:

μ = Rata-rata jumlah unit yang dapat dilayani per waktu
e = 2,71828

Jumlah rata-rata unit yang dapat dilayani per periode waktu disebut tingkat layanan.

Contoh 2

Sebuah toko burger mempelajari proses pengisian pesanan dan menemukan bahwa seorang karyawan dapat memproses rata-rata 60 pesanan pelanggan per jam. Pada satu menit, tingkat layanannya μ = 60 customer/60 menit = 1 customer per menit.

Berapa probabilitas yang dapat diproses dalam :

a. Dibawah 0,5 menit?
b. Dibawah 1 menit?
c. Dibawah 2 menit?

Jawab
Untuk menghitung soal di atas dengan μ = 1, maka probabilitasnya:

$$P(service\ time\ \leq 0{,}5) = 1 - e^{-1(0{,}5)} = 1 - 0{,}6065 = 0{,}3935$$
$$P(service\ time\ \leq 1.0) = 1 - e^{-1(1.0)} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$$
$$P(service\ time\ \leq 2{,}0) = 1 - e^{-1(2{,}0)} = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$$

II. Single-Server Waiting Line Model

Pada bagian ini akan menyajikan rumus yang dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi kondisi stabil pada model satu antrian dan satu layanan. Rumus yang digunakan dengan tingkat kedatangan yaitu distribusi probabilitas Poisson dan waktu layanan mengikuti distribusi probabilitas eksponensial.

Rumus berikut dapat digunakan untuk menghitung karakteristik operasi kondisi stabil untuk satu jalur antrian dengan satu layanan (single server) dengan tingkat kedatangan Poisson dan waktu layanan eksponensial, dimana:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)

μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Nilai dari tingkat kedatangan dan tingkat layanan merupakan komponen penting dalam menentukan karakteristik operasi. Pada persamaan ke 6 $\frac{\lambda}{\mu}$ menunjukkan rasio tingkat kedatangan terhadap tingkat layanan,, memberikan probabilitas bahwa unit yang tiba harus menunggu karena fasilitas layanan sedang digunakan.

Contoh 3

Ingatlah bahwa untuk masalah Burger Dome, kami memiliki tingkat kedatangan 0,75 pelanggan per menit dan tingkat layanan 1 pelanggan per menit. Hitunglah karakteristik operasi untuk Burger Dome dengan satu jalur antrian dan satu server!

Jawab:

Dari kasus tersebut dapat kita hitung menggunakan rumus dari karakteristik di atas:

a. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0,75}{1} = 0,25$

b. $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0,75^2}{1(1 - 0,75)} = 2,25\ customer$

c. $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2{,}25 + \frac{0{,}75}{1} = 3\ customer$

d. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2{,}25}{0{,}75} = 3\ menit$

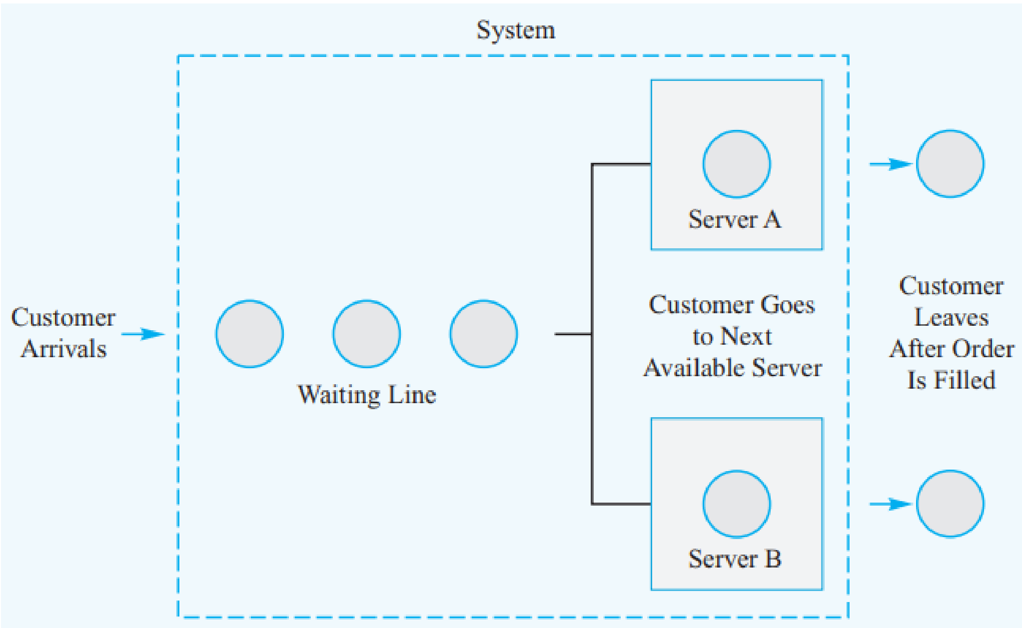
e. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4\ menit$

f. $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75$

III. Model Multiple-Server Waiting Line

Jalur antrian multi server terdiri dari dua atau lebih server (layanan) yang dianggap identik dalam hal kemampuan layanan. Pada sistem multi-server, ada dua kemungkinan antrian yaitu:

1. Pelanggan yang datang menunggu dalam satu jalur antrian dan kemudian pindah ke server pertama yang tersedia untuk diproses dan antrian selanjutnya ke server ke dua.
2. Setiap server memiliki antrian masing-masing dan pelanggan yang datang memilih salah satu jalur ini untuk bergabung dan biasanya tidak diizinkan untuk berpindah jalur antrian.



Gambar 2. Multi server waiting line

Pada multi server waiting line rumusnya dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi dalam kondisi yang stabil pada jalur antrian beberapa server. Rumus ini berlaku jika pada kondisi berikut :

1. Kedatangan mengikuti distribusi probabilitas poisson.
2. Waktu layanan untuk masing-masing server mengikuti distribusi probabilitas exponensial.
3. Tingkat layanan µ sama pada maisng-masing server.
4. Antrian kedatangan pada satu jalur antrian dan masuk ke server untuk dilayani.

Rumus berikut dapat digunakan untuk menghitung karakteristik operasi kondisi stabil untuk jalur antrian multi server:

Dimana:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)
μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)
k = jumlah server (layanan)

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^k \lambda\mu}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} P_0$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right) P_0$$

7. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad \text{untuk } n \leq k$$
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{k!k^{(n-k)}} P_0 \quad \text{untuk } n > k$$

Pada rumus persamaan di atas μ adalah tingkat layanan untuk setiap server, kμ adalah tingkat layanan untuk beberapa server dalam sistem. Sebagaimana berlaku untuk model jalur antrian single-server, rumus untuk pengoperasian karakteristik jalur antrian multi server juga dapat diterapkan hanya dalam situasi di mana tingkat layanan untuk sistem melebihi tingkat kedatangan dalam sistem, dengan kata lain, rumus hanya berlaku jika kμ lebih besar dari λ

Untuk membantu menyederhanakan penggunaan persamaan multi-server, Tabel berikut berisi nilai dari P_0 yang dapat dipilih dengan nilai rasio λ/μ dan k. Besarnya nilai P_0 telah disediakan dalam tabel sesuai dengan kasus di mana kμ > λ, maka tingkat layanan sudah dapat untuk memproses semua kedatangan yang antri. Tabelnya dapat dilihat seperti berikut:

Tabel 1. Nilai P_0 pada multi-server waiting line

	Number of Servers (*k*)			
Ratio λ/μ	**2**	**3**	**4**	**5**
0.15	0.8605	0.8607	0.8607	0.8607
0.20	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187
0.25	0.7778	0.7788	0.7788	0.7788
0.30	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408
0.35	0.7021	0.7046	0.7047	0.7047
0.40	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703
0.45	0.6327	0.6373	0.6376	0.6376
0.50	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065
0.55	0.5686	0.5763	0.5769	0.5769
0.60	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488
0.65	0.5094	0.5209	0.5219	0.5220
0.70	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966
0.75	0.4545	0.4706	0.4722	0.4724
0.80	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493
0.85	0.4035	0.4248	0.4271	0.4274
0.90	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065
0.95	0.3559	0.3831	0.3863	0.3867
1.00	0.3333	0.3636	0.3673	0.3678
1.20	0.2500	0.2941	0.3002	0.3011
1.40	0.1765	0.2360	0.2449	0.2463
1.60	0.1111	0.1872	0.1993	0.2014
1.80	0.0526	0.1460	0.1616	0.1646
2.00		0.1111	0.1304	0.1343
2.20		0.0815	0.1046	0.1094
2.40		0.0562	0.0831	0.0889
2.60		0.0345	0.0651	0.0721
2.80		0.0160	0.0521	0.0581
3.00			0.0377	0.0466
3.20			0.0273	0.0372
3.40			0.0186	0.0293
3.60			0.0113	0.0228
3.80			0.0051	0.0174
4.00				0.0130
4.20				0.0093
4.40				0.0063
4.60				0.0038
4.80				0.0017

Contoh 4

Burger Dome restoran makanan cepat saji mempunyai masalah jalur antrian. Misalkan manajemen ingin mengevaluasi keinginan membuka layanan pemrosesan pesanan dengan dua layanan sehingga dua pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Anggap satu baris antrian dengan pelanggan pertama dalam antrean dapat dilayani pada server pertama yang tersedia dan antrian yang kedua masuk pada server kedua. Lakukan evaluasi karakteristik operasi untuk sistem dengan dua server tersebut!

Jawab

Kita dapat menggunakan rumus multi-server waiting line untuk mencari nilai karakteristik kasus di atas seperti berikut:

1. Untuk mencari P_0 kita dapat menggunakan tabel rasio multi server di atas, maka nilai:
   P_0 = 0,4545 (dilihat pada tabel dengan λ/μ = 0,75 dan k = 2)
2. $L_q = \frac{\left(\frac{0,75}{1}\right)^2 (0,75)(1)}{(2-1)![2(1)-0,75\}^2}(0,4545) = 0,1227 \ customer$
3. $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0,1227 + \frac{0,75}{1} = 0,8727 \ customer$
4. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,1227}{0,75} = 0,1636 \ menit$
5. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,1636 + \frac{1}{1} = 1,1636 \ menit$
6. $P_w = \frac{1}{2!}\left(\frac{0,75}{1}\right)^2 \left[\frac{2(1)}{2(1)-0,75}\right](0,4545) = 0,2045$

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.