Modul Kuliah ke 11
TPK

Model Antrian bagian kedua

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami model antrian single dengan waktu sevice yang berubah
2. Memahami model waiting line dengan jumlah populasi yang diketahui.

I. Model antrian single dengan waktu sevice yang berubah

Model ini yaitu model jalur antrian satu server di mana kedatangan secara distribusi probabilitas poisson dengan asumsi bahwa distribusi probabilitas untuk waktu layanan bukan distribusi probabilitas eksponensial. Jadi, menggunakan notasi Kendall, model jalur antrian adalah model M/G/1, di mana G menunjukkan distribusi probabilitas umum atau tidak spesifik.

Notasi yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik operasi untuk model M/G/1 adalah sebagai berikut:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)

μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)

σ = standar deviaasi pada waktu layanan

Beberapa karakteristik operasi kondisi-stabil dari model jalur antrian M/G/1 adalah sebagai berikut:

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1 - \lambda/\mu)}$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Nilai dari tingkat kedatangan dan tingkat layanan merupakan komponen penting dalam menentukan karakteristik operasi. Pada persamaan ke 6 $\frac{\lambda}{\mu}$ menunjukkan rasio tingkat kedatangan terhadap tingkat layanan,, memberikan probabilitas bahwa unit yang tiba harus menunggu karena fasilitas layanan sedang digunakan.

Contoh 1

Penjualan eceran di Hartlage's Seafood Supply ditangani oleh satu petugas. Kedatangan pelanggan mengikuti distribusi Poisson, dan tingkat kedatangan adalah 21 pelanggan per jam atau λ = 21/60 = 0,35 customer per menit. Menurut hasil pengamatan memperlihatkan waktu service rata-rata 2 menit per customer dan standar deviasi populasi σ = 1,2 menit. Rata-rata tingkat layanan (service) μ = 0,5 customer per menit. Berapakah Karakteristik operasi dengan model M/G/1 sistem jalur antrian tersebut?

Jawab:

Dari kasus tersebut dapat kita hitung menggunakan rumus dari karakteristik di atas:

a. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0,35}{0,5} = 0,30$

b. $L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)} = L_q = \frac{(0,35)^2(1,2)^2 + (0,35/0,5)^2}{2(1-0,35/0,5)} = 1,1107\ customer$

c. $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,1107 + \frac{0,35}{0,5} = 1,8107\ customer$

d. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,1107}{0,35} = 3,1733\ menit$

e. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3,1733 + \frac{1}{0,5} = 5,1733\ menit$

f. $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,35}{0,5} = 0,70$

Manajer Hartlage dapat meninjau karakteristik operasi yang dihasilkan ini untuk menentukan penambahan petugas kedua tampaknya bermanfaat.

II. Model Waiting Line dengan Jumlah Populasi yang Diketahui

Model ini dapat digunakan ketika asumsi jumlah unit atau pelanggan maksimum yang mengantri pada jalur antrian diketahui. Pada kondisi ini tingkat kedatangan pada sistem berubah, tergantung pada jumlah unit pada antrian, model antrian ini ini disebut model dengan jumlah populasi terbatas atau diketahui.

Rumus untuk karakteristik operasi antrian sebelumnya model jalur harus dimodifikasi untuk memperhitungkan efek dari populasi yang terbatas. Model populasi dengan jumlah terbatas yang dibahas dalam bagian ini didasarkan pada asumsi yang berikut ini:

1. Kedatangan tiap unit mengikuti distribusi probabilitas poisson dengan tingkat kedatangan λ.
2. Waktu service mengikuti distribusi probabilitas exponensial dengan tingkat layanan μ.
3. Populasi unit yang dilayani jumlahnya diketahui.

Berdasarkan asumsi yang digunakan yaitu tingkat kedatangan tetap konstan pada beberapa unit dalam sistem antrian. Asumsi yang dipakai adalah jumlah populasi yang terbatas. Model ini menggunakan satu server, maka model jalur antrian ini disebut juga model M/M/1 dengan populasi yang diketahui.

Notasi yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik operasi untuk model M/M/1 adalah sebagai berikut:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)
μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)
N = jumlah populasi

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{(N - L)\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = 1 - P_0$$

7. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \frac{N1}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{untuk n = 0,1,…,N}$$

Contoh 4

Perusahaan Manufaktur Kolkmeyer menggunakan enam mesin identik, yang masing-masing beroperasi rata-rata 20 jam antar kerusakan. Dengan demikian, tingkat kedatangan atau permintaan untuk layanan perbaikan untuk setiap mesin adalah λ =1/20 = 0,05 per jam. Kejadian kerusakan mesin mengikuti distribusi probabilitas poisson untuk menentukan proses tingkat kedatangan. Satu orang dari bagian teknisi disediakan sebagai single server layanan perbaikan untuk 6 mesin tersebut.Waktu service mengikuti distribusi ekponensial dengan 2 jam per mesin atau tingkat layanan (service rate) μ = 0,5 mesin per jam. Hitunglah karakteristik pada kasus tersebut!

Jawab:

Diketahui

λ = 0,05 dan μ = 0,5 dengan N = 6, maka:

a. $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{6!}{(6-0)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^0 + \frac{6!}{(6-1)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^1 + \frac{6!}{(6-2)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^2 + \frac{6!}{(6-3)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^3 + \frac{6!}{(6-4)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^4 + \frac{6!}{(6-5)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^5 + \frac{6!}{(6-6)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^6}$$

= 0,4845

b. $L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - P_0) = L_q = 6 - \left(\frac{0,05+0,5}{0,05}\right)(1 - 0,4845) = 0,3295 \ mesin$

c. $L = L_q + (1 - P_0) = L = 0,3295 + (1 - 0,4845) = 0,8451 \, mesin$

d. $W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda} = W_q = \frac{0,3295}{(6-0,8451)0,50} = 1,279 \, jam$

e. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = W = 1,279 + \frac{1}{0,50} = 3,279 \ jam$

f. $P_w = 1 - P_0 = P_w = 1 - 0,4845 = 0,5155$

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.