Modul Kuliah ke 12
TPK

Proses Markov

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep proses markov
2. Merumuskan masalah dalam analisis proses markov.
3. Mencari penyelesaian masalah dalam proses perhitungan menggunakan proses markov

I. Konsep Proses Markov

Konsep dasar analisis markov adalah status dari sistem atau status transisi, sifat dari proses ini adalah apabila diketahui proses berada dalam suatu keadaan tertentu, maka peluang berkembangnya proses di masa mendatang hanya tergantung pada keadaan saat ini dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya, atau dengan kata lain rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang bersyarat kejadian yang akan datang tergantung pada kejadian sekarang.

Model markov berhubungan dengan suatu rangkaian proses dimana kejadian akibat suatu eksperimen hanya tergantung pada kejadian yang langsung mendahuluinya dan tidak tergantung pada rangkaian kejadian sebelum-sebelumnya yang lain.

Model proses Markov berguna dalam mempelajari evolusi sistem melalui percobaan yang berulang-ulang. Percobaan berulang sering kali sukses berdasarkan periode waktu berturut-turut di mana keadaan sistem dalam periode tertentu tidak dapat ditentukan dengan pasti. Sebaliknya, probabilitas transisi digunakan untuk menggambarkan cara di mana sistem membuat transisi dari satu periode ke periode selanjutnya.

Model proses Markov dapat digunakan untuk menggambarkan probabilitas bahwa suatu mesin dapat berfungsi dalam satu periode akan terus berfungsi atau akan mogok di periode berikutnya. Model juga dapat digunakan untuk menggambarkan probabilitas bahwa konsumen membeli merek A di satu periode akan membeli merek B di periode berikutnya. Seperti contoh Sebuah layanan kesehatan dan layanan perawatan, menjelaskan bagaimana model proses Markov digunakan untuk menentukan probabilitas status kesehatan untuk orang berusia 65 dan lebih tua. Informasi tersebut sangat membantu dalam memahami kebutuhan dimasa depan untuk program layanan perawatan kesehatan dan manfaat memperluas layanan kesehatan saat ini

II. Analisis Proses Markov

Sebelum analisis proses markov kita perlu untuk mengetahui probabilitas transisi. Probabilitas Transisi adalah perubahan dari satu status ke status yang lain pada periode (waktu) berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas. Untuk lebih jelas perpindahan status dari waktu sekarang ke status pada waktu selanjutnya, dapat diliha pada tabel berikut:

Tabel 1. Matrik Probabilitas Transisi

Dari Status ke:	Pindah ke status ke:					
	1	2	..	j	..	n
1	P_{11}	P_{12}	..	P_{1j}	..	P_{1n}
2	P_{21}	P_{22}	..	P_{2j}	..	P_{2n}
..	..	..	..	..	..	..
i	P_{i1}	P_{i2}	..	P_{ij}	..	P_{in}
..	..	..	..	..	..	..
n	P_{n1}	P_{n2}	..	P_{nj}	..	P_{nn}

Dari tabel di atas kita lihat bahwa n adalah jumlah keadaan dalam proses dan pij adalah kemungkinan transisi dari keadaan saat i ke keadaan j. Jika saat ini berada pada keadaan i maka baris i dari tabel di atas berisi angka-angka pi1, pi2,.., pij,.., pin merupakan kemungkinan berubah ke keadaan berikutnya. Oleh karena angka tersebut melambangkan kemungkinan, maka semuanya melupakan bilangan non negatif dan tidak lebih dari satu. Secara matematis:

$$0 < p_{ij} < 1 \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$\Sigma\, p_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, ..., n$$

Contoh 1

Pada suatu kota kecil terdapat dua pasar swalayan W dan L. Diasumsikan setiap pembeli di kota tersebut melakukan kunjungan belanja satu kali per minggu. Dalam sembarang minggu seorang pembeli hanya berbelanja di W atau di L saja, dan tidak di keduanya. Kunjungan belanja disebut percobaan (trial) dari proses dan toko yang dipilih disebut keadaan dari proses. Suatu sampel 100 pembeli diambil dalam periode 10 minggu, kemudian data dikompilasikan.

Dalam menganalisis data, terlihat bahwa dari seluruh pembeli yang berbelanja di W dalam suatu minggu, 90 persen tetap berbelanja di toko W pada minggu berikutnya, sedangkan sisanya berpindah belanja pada toko L. 80 persen dari yang berbelanja di toko L dalam suatu minggu tetap berbelanja di toko L sedangkan 20 persen berpindah belanja pada toko W. Informasi tersebut disusun pada tabel 2 berikut :

Tabel 2. Matriks Transisi

Pilihan pada suatu minggu	**Pilihan minggu berikutnya**	
	W	**L**
W	90	10
L	20	80

Pada baris pertama dan baris kedua berjumlah 100, tetapi jumlah kolom tidak. Informasi ini digunakan untuk membuat matriks kemungkinan perpindahan keadaan / transisi.

Didefinisikan :

Keadaan 1 : Pembeli berbelanja di W

Keadaan 2 : Pembeli berbelanja di L

Dengan demikian matriks kemungkinan transisinya adalah :

Tabel 3. Probabilitas Transisi

Pilihan pada suatu minggu	**Pilihan minggu berikutnya**	
	W	**L**
W	90/100 = 0.9	10/100 = 0.1
L	20/100 = 0.2	80/100 = 0.8

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa probabilitas pada setiap baris berjumlah satu. Untuk mendapatkan analisa rantai markov ke dalam suatu kasus, ada beberapa syarat yang harus dipenuhi, adalah sebagai berikut:

1. Jumlah probabilitas transisi untuk suatu keadaan awal dari sistem sama dengan 1.
2. Probabilitas-probabilitas tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
3. Probabilitas transisi konstan sepanjang waktu.
4. Kondisi merupakan kondisi yang independen sepanjang waktu.

Penerapan analisa markov dapat dibilang cukup terbatas karena sulit menemukan masalah yang memenuhi semua sifat yang diperlukan untuk analisa markov, terutama persyaratan bahwa probabilitas transisi harus konstan sepanjang waktu .

Untuk menggambarkan probabilitas transisi, kita dapat menggunakan probabilitas Tree yaitu cara yang mudah untuk menggambarkan sejumlah transisi tertentu dari suatu proses Markov

Contoh 2

Sebuah perusahaan transportasi mempunyai 220 unit mobil. Namun tidak semua mobil dapat beroperasi dikarenakan mesin rusak. Data mobil yang sedang beroperasi(narik) dan rusak(mogok) adalah sebagai berikut :

Tabel 4. Transisi perpindahan status mobil

Status saat ini	**Banyaknya mobil**	
	Hari 1	**Hari 2**
Narik	120	144
Mogok	100	76
Jumlah	220	220

Dalam waktu dua hari ini terdapat perubahan, mobil yang beroperasi ternyata mengalami kerusakan, dan sebaliknya. Untuk mengetahui perubahan yang terjadi dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Hari l	**Hari II**		**Jumlah**
	Narik	**Mogok**	
Narik	70	50	120
Mogok	74	26	100
Jumlah	144	76	220

Dari data tersebut hitunglah :

a. Probabilitas transisi
b. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 narik
c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik
d. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 mogok
e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok

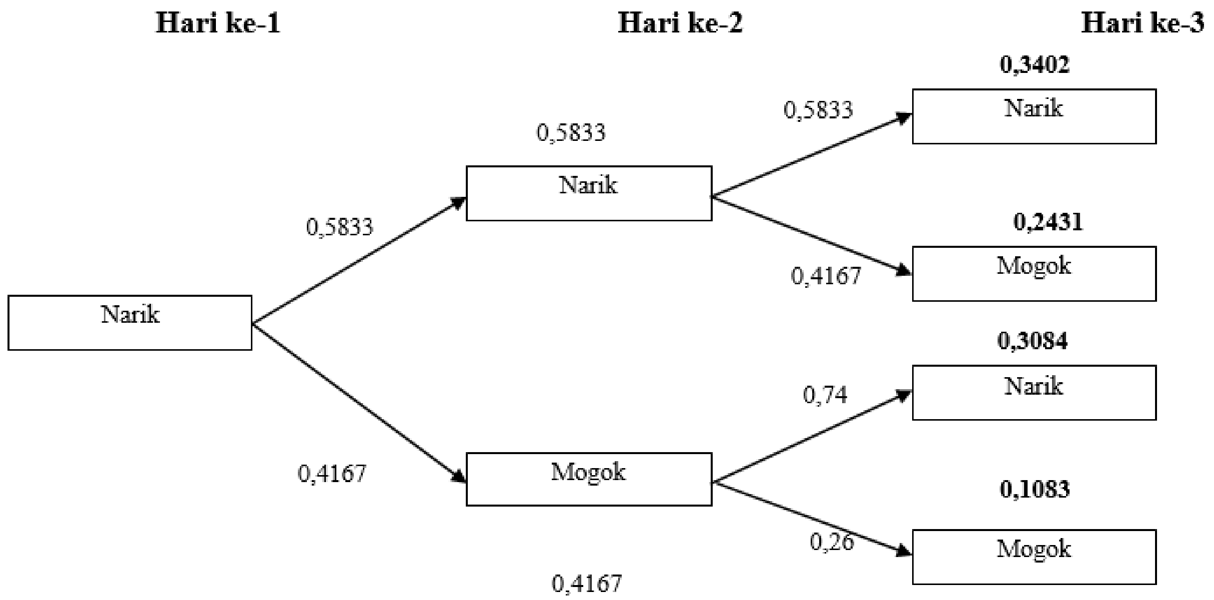
Jawaban :

a. Probabilitas Transisi

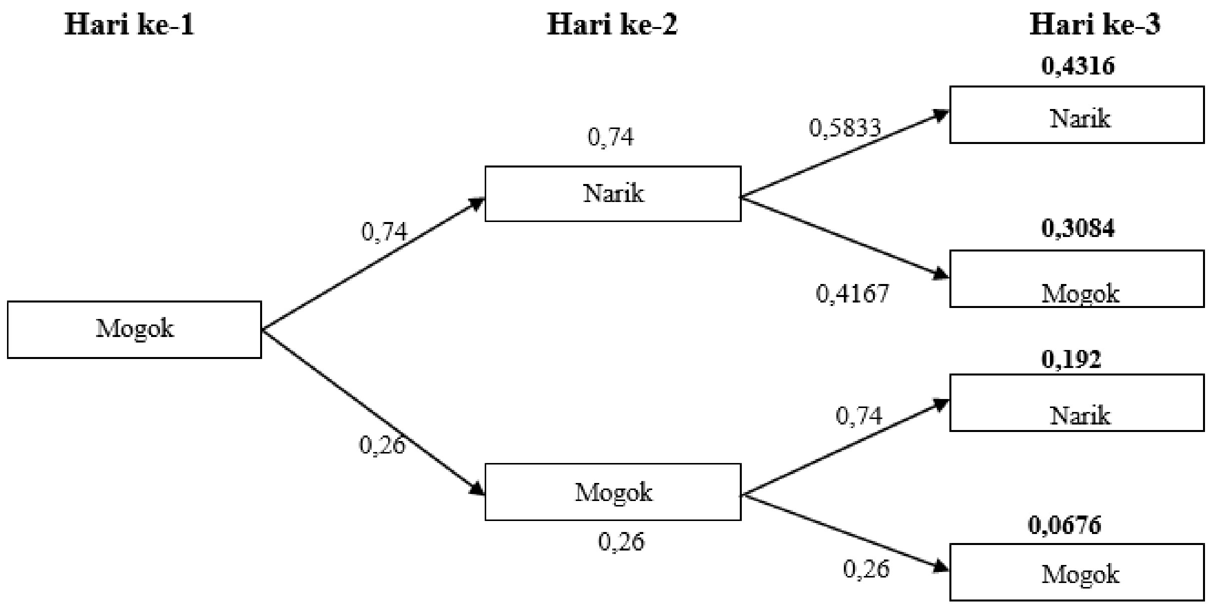
Hari l	**Hari II**	
	Narik	**Mogok**
Narik	70/120= **0,5833**	50/120 = **0,4167**
Mogok	74/100 = **0,74**	26/100 = **0,26**

Kita dapat menggunakan diagram pohon untuk melihat perpindahan status probabilitas transisinya dengan status awal yang ditentukan seperti berikut:

Status Jika Hari ke 1 **NARIK** :



Probabilitas Tree jika hari ke-1 NARIK



Probabilitas Tree jika hari ke-1 MOGOK

Dari 2 gambar tersebut, kita bias menjawab jawab soal di atas, sehingga :

b. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 narik = 0,3402 + 0,3084 = 0,6486
c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik = 0,2431 + 0,1083 = 0,3514
d. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 mogok = 0,4316 + 0,1924 = 0,624
e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok = 0,3084 + 0,0676 = 0,376

III. Analisis Proses Markov Pendekatan Matrik

Untuk menjelaskan analisis proses menggunakan pendekatan operasi matrik, kita uraikan melalui contoh berikut:

Contoh 3

Pada kasus sebelumnya pada status mobil, ada kalanya kita harus mencari probabilitas pada periode yang sangat besar, misalkan periode hari ke-9, ke-10 dan seterusnya, akan sangat menyulitkan dan membutuhkan media penyajian yang khusus jika kita menggunakan Probabilitas Tree. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Pendekatan Matriks Probabilitas.

Adapun Matriks Probabilitas dari contoh kasus di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0,5833 & 0,4167 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-i jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

$$\text{Probabilitas Narik} \longrightarrow \pi_i\,(n) \longleftarrow \text{Periode ke-n}$$

$$\uparrow$$

$$\text{Status Awal Narik}$$

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

$$\text{Probabilitas Narik} \longrightarrow \pi_1\,(3) \longleftarrow \text{Periode ke-3}$$

$$\uparrow$$

$$\text{Status Awal Narik}$$

Probabilitas kendaraan mogok pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 mogok, dilambangkan dengan:

$$\text{Probabilitas Mogok} \longrightarrow \pi_2\,(3) \longleftarrow \text{Periode ke-3}$$

$$\uparrow$$

$$\text{Status Awal Mogok}$$

Jawaban

Jika kendaraan pada hari ke-1 narik maka berlaku probabilitas sebagai berikut:

π_1 (l) = 1 sedangkan π_2 (l) = 0

Jika probabilitas di atas disusun ke dalam vektor baris, maka kita dapatkan:

(π_1(l) π_2(l)) = (l 0)

Adapun rumus untuk mencari probabilitas periode berikutnya (i+1) adalah:

(π_1 (i+1) π_2(i+1)) = (π_1(i) π_2 (i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Bila rumus di atas kita gunakan untuk mencari probabilitas hari ke-2, maka:

$$(\pi_1\,(2)\quad \pi_2\,(2)) = (\pi_1\,(1)\quad \pi_2\,(1)) \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$= (0{,}5833 \quad 0{,}4167)$$

Terlihat bahwa hasilnya sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode Probabilities Tree. Dengan menggunakan cara yang sama kita akan dapatkan status untuk periode-periode berikutnya sebagai berikut:

$$(\pi_1\,(3) \quad \pi_2\,(3)) = (0{,}6486 \quad 0{,}3514)$$
$$(\pi_1\,(4) \quad \pi_2\,(4)) = (0{,}6384 \quad 0{,}3616)$$
$$(\pi_1\,(5) \quad \pi_2\,(5)) = (0{,}6400 \quad 0{,}3400)$$
$$(\pi_1\,(6) \quad \pi_2\,(6)) = (0{,}6397 \quad 0{,}3603)$$
$$(\pi_1\,(7) \quad \pi_2\,(7)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$
$$(\pi_1\,(8) \quad \pi_2\,(8)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Terlihat bahwa perubahan probabilitas semakin lama semakin mengecil sampai akhirnya tidak tampak adanya perubahan. Probabilitas tersebut tercapai mulai dari periode ke-7, dengan probabilitas status:

$$(\pi_1\,(7) \quad \pi_2\,(7)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Ini berarti pemilik kendaraan dapat menarik kesimpulan bahwa jika awalnya kendaraan berstatus narik, setelah beberapa periode di masa depan probabilitasnya narik adalah sebesar 0,6398 dan probabilitasnya mogok adalah sebesar 0,3602.

Untuk perhitungan probabilitas status hari pertama mogok dapat kita cari dengan metode yang sama dan akan kita dapatkan probabilitas yang akan sama untuk periode selanjutnya, mulai dari periode ke-8. Adapun probabilitas pada periode ke-8 adalah:

$$(\pi_1(8) \quad \pi_2(8)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Dari contoh kasus di atas dengan status hari ke-1 narik, maka kita dapatkan:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Untuk mengurangi keruwetan, periode (i) dapat kita hilangkan, karena pada saat Steady State tercapai periode tidak akan mempengaruhi perhitungan. Sehingga perhitungan di atas akan menjadi:

$$(\pi_1(2) \quad \pi_2(2)) = (\pi_1(1) \quad \pi_2(1)) \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas akan menghasilkan persamaan berikut:

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74\, \pi_2$ .... (1)

$\pi_2 = 0{,}4167\, \pi_1 + 0{,}26\, \pi_2$ .... (2)

Karena salah satu ciri proses markov adalah: π_1 (i) + π_2 (i) = 1, maka:

$\pi_1 + \pi_2 = 1 \qquad \pi_2 = 1 - \pi_1$

Dengan menstubstitusikan $\pi_2 = 1 - \pi_1$ ke persamaan (1) didapatkan:

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74(l - \pi_1)$

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74 - 0{,}74\, \pi_1$

$l{,}1567\, \pi_1 = 0{,}74$

$\pi_1 = 0{,}6398$

Lalu kita masukkan nilai $\pi_1 = 0{,}6398$ ke dalam persamaan (2) didapatkan:

$\pi_2 = 0{,}4167\, \pi_1 + 0{,}26\, \pi_2$

$\pi_2 = 0{,}4167\, (0{,}6398) + 0{,}26\, \pi_2$

$\pi_2 = 0.2666 + 0{,}26\, \pi_2$

$0{,}74\, \pi_2 = 0.2666$

$\pi_2 = 0{,}3602$

Contoh 4

Dari contoh kasus kita ketahui bahwa Pemilik Kendaraan memiliki 220 kendaraan. Dengan menggunakan Probabilitas Steady State yang sudah kita dapatkan, Pemilik dapat mengharapkan jumlah kendaraan setiap harinya narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,6398 x 220= 140,756 atau sebanyak 141 kendaraan

Mogok : Mn x 220 = 0,3602 x 220= 79,244 atau sebanyak 79 kendaraan

Misalkan Pemilik kurang puas dengan tingkat operasi yang ada dan ingin meningkatkannya, sehingga Pemilik mengambil kebijakan untuk menggunakan suku cadang asli dalam setiap perawatan armada. Kebijakan ini membuat Matriks Probabilitas Transisi berubah menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Dari matrik tersebut dapat kita artikan bahwa kebijakan ini membuat Probabilitas saat ini narik, lalu hari berikutnya mogok menurun dari 0,4 menjadi 0,3. Probabilitas Steady State yang baru adalah:

$$(\pi_1 \quad \pi_2) = (\pi_1 \quad \pi_2) \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Sehingga kita adpatkan persamaan berikut:

$\pi_1 = 0,7\,\pi_1 + 0,74\,\pi_2$……………………….(1)

$\pi_2 = 0,3\,\pi_1 + 0,26\,\pi_2$……………………(2)

Substitusikan $\pi_1 = 1 - \pi_2$ ke persamaan (2), sehingga kita dapatkan:

$\pi_2 = 0,2885$ dan $\pi_1 = 0,7116$

Artinya setiap harinya Pemilik dapat mengharapkan kendaraan yang narik atau mogok sebanyak:

Narik : π_1 x 220 = 0,7116 x 220 = 156,55 atau sebanyak 157 kendaraan

Mogok : π_2 x 220 = 0,2885 x 220 = 63,47 atau sebanyak 63 kendaraan

Kebijakan tersebut menghasilkan kenaikan operasional dari 141 kendaraan perhari menjadi 157 kendaraan perhari. Dalam hal ini Pemilik harus mengevaluasi kebijakan ini, apakah kenaikan pendapatan operasional dapat menutupi kenaikan biaya operasional karena kebijakan ini. Misalkan karena kebijakan ini terjadi kenaikan biaya perawatan kendaraan sebesar Rp. 1.000.000,- setiap harinya. Jadi bila kenaikan pendapatan operasional lebih besar dari Rp. 1.000.000,- maka kebijakan tersebut layak untuk dijalankan.

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.

http://fajarbax89.blogspot.com/2009/10/sejarah-penggunan-markov-chain.html

http://dhedee29.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/50573/analisis+markov.pdf