Modul Kuliah ke 2

TPK

Probabilitas dan Distribusi Probabilitas

Kompetensi:

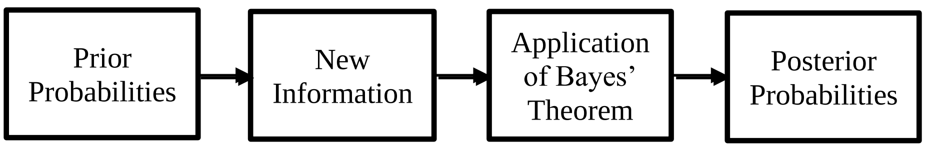
Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami hukum bayes.
2. Memahami metode Binomial, poisson, eksponesial.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus

I. Teorema Bayes

Seringkali analisis probabilitas dimulai dengan adanya probabilita awal (*Prior Probabilties*). Kemudian dari sampel, laporan khusus, atau *product test* didapatkan sejumlah informasi tambahan yang baru. Berdasarkan informasi tambahan tersebut, dapat dihitung probabilitas akhir (*posterior probabilities*) menggunakan teorema bayes.

Teorema Bayes merupakan suatu metode untuk menghitung probabilitas akhir. Langkah-langkah dalam menggunakan teorema bayes dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1. Langkah teorema bayes

Teorema Bayes berlaku ketika peristiwa yang ingin kita hitung posterior probabilitasnya saling eksklusif dan penyatuan mereka adalah seluruh sample space. Teorema Bayes dapat diperluas ke kasus n peristiwa yang saling eksklusif A_1, A_2, ..., A_n, dimana gabungan dari seluruh sample space. Dalam kasus seperti itu, teorema Bayes dapat digunakan untuk menghitung probabilitas posterior P (Ai|B).

Untuk menghitung *posterior probability* terjadinya event A_i ketika terjadi event B dapat diterapkan <u>Teorema Bayes</u>

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Teorema Bayes dapat diterapkan apabila event-event yang akan diperhitungkan posterior probabilitiesnya adalah *mutually exclusive* dan gabungannya adalah keseluruhan sample space.

Probabilitas bahwa yang terpilih adalah A_i ketika dengan syarat B dihitung sebagai berikut :

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

Contoh 1

Pada pemilihan ketua senat pada suatu kampus terdapat dua kandidat yaitu A_1 dan A_2. Informasi awal probabilitas pada dua kandidat tersebut dapat terpilih menjadi ketua senat adalah sebagai berikut:

A_1 = kandidat pertama terpilih menjadi ketua senat

A_2 = kandidat kedua terpilih menjadi ketua senat

Prior Probabilities:

Diprediksikan $P(A_1) = 0.7$, $P(A_2) = 0.3$

New Information:

Diketahui pula bahwa masing-masing kandidat memiliki program yang berbeda sehingga berdampak pada perbedaan probabilitas didirikannya koperasi mahasiswa (B). Dimana probabilitas program koperasi mahasiswa dapat berdiri pada masing-masing kandidat adalah sebagai berikut:

$P(B|A_1) = 0.2$ $P(B|A_2) = 0.9$

Dari probabilitas tersebut kita dapat menentukan probabilitas program koperasi tidak dapat berdiri pada masing-masing kandidat adalah sebagai berikut:

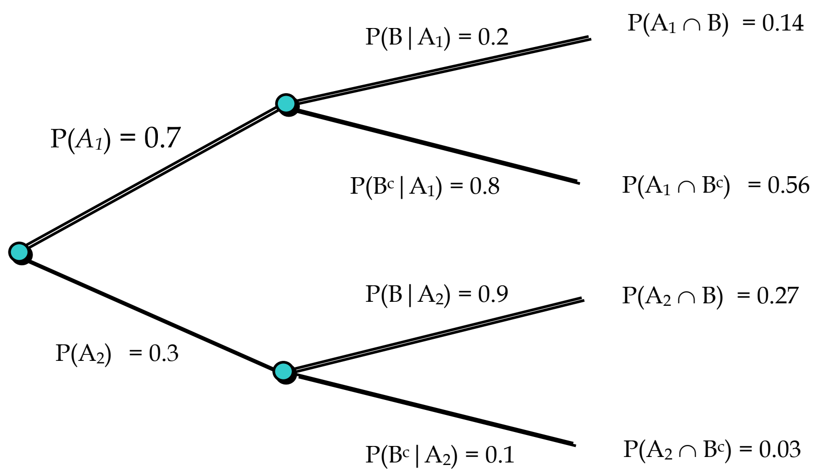
$P(B^c|A_1) = 0.8$ $P(B^c|A_2) = 0.1$

Dari kasus tersebut hitunglah probabilitas posteriornya!

Jawaban

Dari kasus di atas kita dapat menggunakan 2 cara yaitu:

a. Menggunakan Diagram pohon



Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{(0,7)(0,2)}{(0,7)(0,2) + (0,3)(0,9)}$$

$$P(A_1|B) = 0,3415$$

Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{(0,3)(0,9)}{(0,7)(0,2) + (0,3)(0,9)}$$

$$P(A_1|B) = 0,6585$$

b. Pendekatan Tabular Teorema bayes

- Probabilitas koperasi dapat berdiri menggunakan teorema bayes adalah sebagi berikut:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Events (A_i)	Prior Probabilities $P(A_i)$	Conditional Probabilities $P(B\|A_i)$	Joint Probabilities $P(A_i \cap B)$	Posterior Probabilities $P(A_i\|B)$
A_1	0,7	0,2	0,14	0,3415
A_2	0,3	0,9	0,27	0,6585
	1		P(B) = 0,41	1

Dari tabel tersebut dapat kita lihat bahwa :

- Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,3415.
- Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,6585

▪ Kita dapat juga mencari probabilitas koperasi tidak dapat berdiri menggunakan teorema bayes adalah sebagi berikut:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Events (A_i)	Prior Probabilities $P(A_i)$	Conditional Probabilities $P(B^c\|A_i)$	Joint Probabilities $P(A_i \cap B)$	Posterior Probabilities $P(A_i\|B)$
A_1	0,7	0,8	0,56	0,949
A_2	0,3	0,1	0,03	0,051
	1		P(B) = 0,59	1

▪ Dari tabel tersebut dapat kita lihat bahwa :
  - Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa tidak dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,949.
  - Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa tidak dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,051

II. Distribusi Probabilitas Diskrit

Pada bahasan bagian ini akan melanjutkan materi mengenai probabilitas dengan konsep dari

variabel random dan distribusi probabilitas. Distribusi probabilitas dapat berupa variabel random diskrit dan kontinu. Distribusi probabilitas yang akan dibahas pada bagian ini yaitu mengenai binomial, Poisson, distribusi probabilitas yang seragam, distribusinormal, dan eksponensial.

1. Variabel Random

Variabel random adalah deskripsi numerik dari *outcome* suatu eksperimen.
Variabel random dapat diklasifikasikan menjadi diskrit (*discrete*) atau kontinu (*continuous*) bergantung pada nilai numerik yang diasumsikan.
Variabel random diskrit (*Discrete random variable*) dapat berupa nilai-nilai dengan jumlah tertentu atau urutan nilai tak terbatas.
Variabel random kontinu (*Continuous random variable*) dapat berupa sembarang nilai numerik pada suatu interval atau kumpulan interval
Contoh 1:

▪ Variabel random diskrit dengan nilai tertentu
  Misal *x* = jumlah mahasiswa kelas A yang tidak hadir, dengan x yang mungkin (0, 1, 2, 3, ……, 30)
▪ Variabel random diskrit dengan nilai berupa urutan tak terbatas
  Misal x = jumlah telfon yang masuk ke panitia penerimaan mahasiswa baru IBS pada suatu hari tertentu, dengan x yang mungkin adalah 0, 1, 2, . . .
▪ Variabel random kontinu

Misal x = jeda waktu antar kedatangan nasabah pada suatu atm, dengan x yang mungkin adalah $x \geq 0$

2. Distribusi Probabilitas Diskrit

Distribusi probabilitas pada variabel random menggambarkan bagaimana probabilita terdistribusi pada nilai-nilai random variabel.

Distribusi probabilitas didefinisikan dengan fungsi probabilitas, dinotasikan sebagai f(x), yang menentukan besarnya probabilitas untuk setiap variabel random.

Syarat fungsi probabilitas diskrit :

$$f(x) \geq 0$$
$$\Sigma f(x) = 1$$

Distribusi probabilitas diskrit dapat digambarkan dengan tabel, grafik atau persamaan

Expected value atau mean, dari variabel random merupakan ukuran nilai sentralnya.

Untuk menghitung expected value variabel random diskrit dapat dilakukan dengan rumus:

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$$

Variance menggambarkan variasi nilai-nilai random variabel.

Untuk menghitung variance variabel random diskrit dapat dilakukan dengan rumus:

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

Contoh 2:
Suatu perusahaan penjualan mobil sedang mengamati data jumlah mobil yang terjual kepada pelanggan tiap harinya selama 300 hari terakhir. Berdasarkan data tersebut dapat dihitung probabilitas jumlah mobil yang terjual pada suatu hari melalui metode frekuensi relatif.

Tabel 3. Penjualan mobil per hari

Jumlah Mobil Terjual (x)	**Jumlah Hari (f)**
0	54
1	117
2	72
3	42
4	12
5	3
Jumlah	300

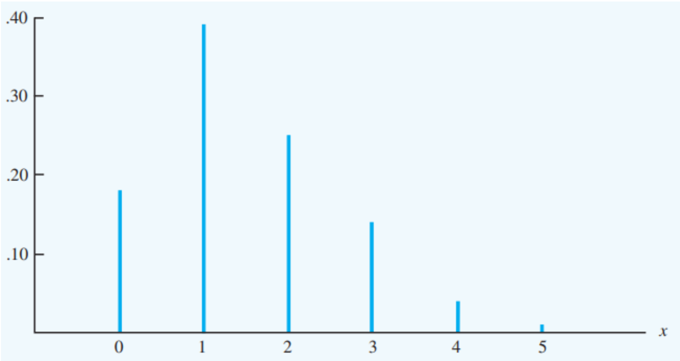
Dari kasus tersebut hitunglah
a. Berapa Probabilitas penjualan mobil tersebut?
b. Berapa expexted value, variance dan standar deviasinya?

Jawaban

a. Kita dapat menghitung probabilitas penjualan mobil dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3. Probabilitas penjualan mobil per hari

Jumlah Mobil Terjual (x)	**Jumlah Hari (f)**	**Probabiltas f(x)**
0	54	54/300 = 0,18
1	117	117/300 = 0,39
2	72	72/300 = 0,24
3	42	42/300 = 0,14
4	12	12/300 = 0,04
5	3	3/300 = 0,01
Jumlah	300	1



Gambar 2. Probabilitas penjualan mobil

b. Untuk menghitung expexted value, variance dan standar deviasinya adalah sebagai berikut:
Rumus *expexted value* : $E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$

(x)	**f(x)**	**xf(x)**
0	0,18	0
1	0,39	0,39
2	0,24	0,48
3	0,14	0,42
4	0,04	0,16
5	0,01	0,05
Jumlah	1	E(x) = 1,50

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa *expexted value* penjualan mobil adalah 1,5 unit.
Rumus variance : $\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot f(x)$

(x)	**$x - \mu$**	**$(x - \mu)^2$**	**f(x)**	**$(x - \mu)^2$f(x)**
0	0-1,5= -1,5	2,25	0,18	0,4050
1	1-1,5=-0,5	0,25	0,39	0,0975
2	2-1,5=0,5	0,25	0,24	0,0600
3	3-1,5=1,5	2,25	0,14	0,3150
4	4-1,5=2,5	6,25	0,04	0,2500
5	5-1,5=3,5	12,25	0,01	0,1225
				σ^2=1,2500

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa variance penjualan mobil adalah 1,25 unit

Untuk mencari standar deviasi dapat kita lakukan dengan menghitung akar dari variance di atas seperti berikut:

$$\delta = \sqrt{\delta^2}$$

$$\delta = \sqrt{1,25}$$

$$\delta = 1,118$$

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa standar deviasi penjualan mobil adalah 1,118 unit

III. Distribusi Probabilitas Binomial

Karakteristik pada eksperimen Binomial adalah sebagai berikut:

- Eksperimen merupakan rangkaian *n* percobaan yang identik.
- Hanya ada dua outcomes yaitu sukses dan gagal yang mungkin terjadi pada setiap percobaan.
- Probabilitas sukses, dinotasikan dengan *p*, tidak berubah dari percobaan satu ke percobaan lainnya.
- Masing-masing percobaan adalah independent

Fungsi Probabilitas Binomial rumusnya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

Dimana :

$f(x)$ = probabilitas x sukses dari n percobaan

n = banyaknya percobaan

p = probabilita sukses dari satu percobaan

x = jumlah yang sukses pada n percobaan

Untuk mencari Expected Value pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$E(x) = \mu = np$$

Untuk mencari Variance pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$Var(x) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

Untuk mencari standar deviasi pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$SD(x) = \sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Contoh 3

Suatu toko pakaian sedang mengkaji pelanggan yang akan melakukan pembelian kepada para pelanggan yang memasuki tokonya. Berdasarkan data periode-periode sebelumnya disimpulkan bahwa pelanggan yang datang akan melakukan pembelian adalah 30%.

Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Jika dipilih 3 pelanggan secara random berapa probabilitas bahwa 2 dari 3 pelanggan tersebut akan melakukan pembelian pada saat mendatangi toko?
b. Berapa variance dan standar deviasinya?

Jawaban

Diketahui :

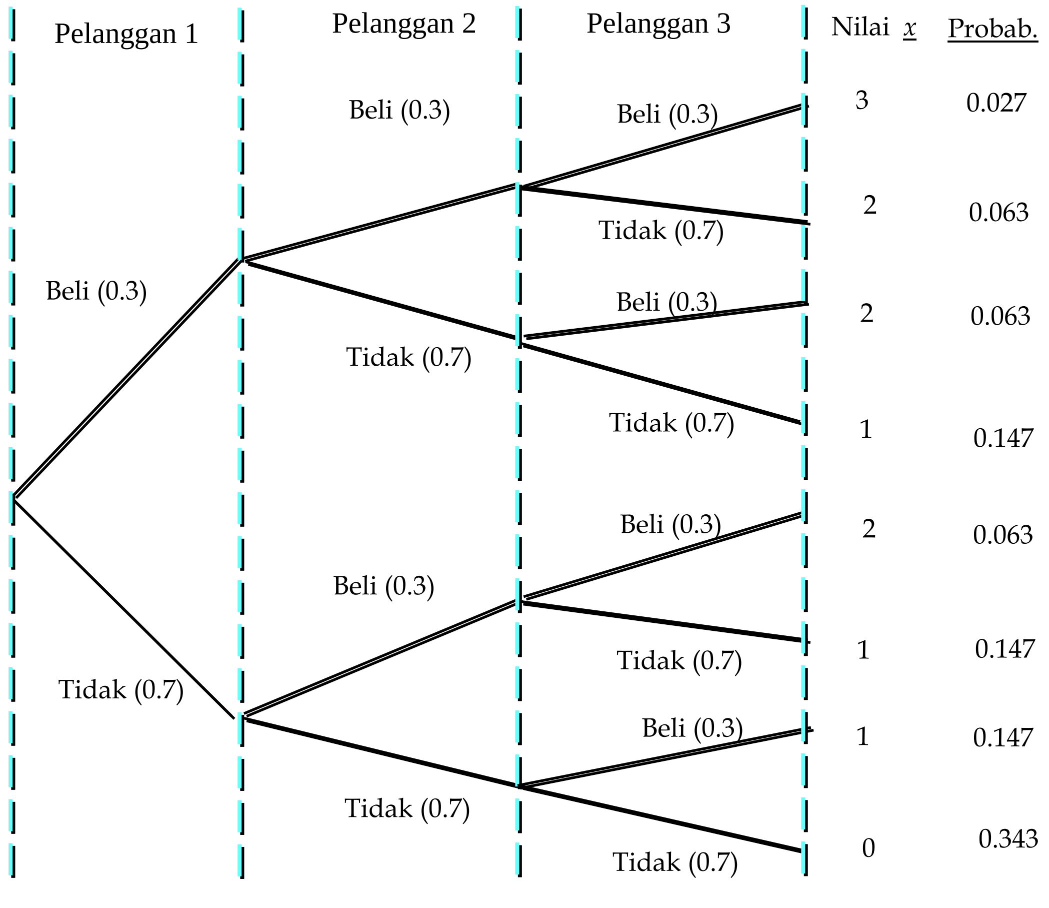
p = 0,3

n = 3

x = 2

Ditanyakan p(2) = ?

a. Untuk mencari berapa probabilitas 2 dari 3 pelanggan yang akan melakukan pembelian, kita dapat menggunakan dengan beberapa cara yaitu:
   1. Menggunakan pohon diagram



Dari gambar di atas terlihat bahwa jumlah pelanggan 2 orang dari 3 orang yang akan membeli adalah : 0,063 + 0,063 + 0,063 = 0,189

2. Menggunakan Rumus probabilitas binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$f(2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} 0{,}3^2 (1-0{,}3)^{(3-2)}$$

$$f(2) = 0{,}189$$

3. Menggunakan tabel probabilitas binomial

		p					
n	***x***	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270

Dari tabel tesesebut dapata diliha bahwa dengan n = 3, p = 0,3, maka:
x = 2 nilai probabilitasnya adalah 0,1890

b. Untuk mencari expexted value, variance dan standar deviasi adalah sebagai berikut:
   1. Untuk mencari Expected Value adalah sebagai berikut:

      $E(x) = \mu = np$

      $E(x) = \mu = (3)(0{,}3)$

      $E(x) = \mu = 0{,}9$

   2. Untuk mencari Variance adalah sebagai berikut:

      $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = np(1 - p)$

      $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = (3)(0{,}3)(1 - 0{,}3)$

      $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = (3)(0{,}3)(0{,}7)$

      $\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = 0{,}63$

   3. *Untuk mencari standar deviasi adalah:*

      $SD(x) = \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0{,}63} = 0{,}79$

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.