

Distribusi Probabilitas Poisson dan Distribusi Normal

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami distribusi probabilitas Poisson.
2. Memahami distribusi probabilitas seragam, distribusi normal.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus tertentu.

I. Distribusi Probabilitas Poisson

Karakteristik eksperimen Poisson

- Probabilitas terjadinya sesuatu sama untuk dua interval sembarang dengan panjang yang sama.
- Terjadi atau tidak terjadinya sesuatu pada sembarang interval independen terhadap sembarang interval yang lain.

Rumus Fungsi probabilitas Poisson adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana :

x = jumlah kejadian pada suatu interval (0,1,2,...)

λ = mean kejadian pada suatu interval

$e = 2,71828$

Pada persamaan tersebut tidak menunjukkan batas atas jumlah nilai yang mungkin dapat terjadi pada variabel random Poisson. Variabel x adalah variabel random diskrit dengan urutan nilai yang tak terbatas ($x = 0, 1, 2, \dots$), maka variabel random Poisson tidak memiliki batas atas yang ditetapkan.

Contoh 1

Jumlah mobil yang datang pada suatu layanan drive thru sebuah restoran siap saji adalah 6 mobil per jam. Berapa probabilitas dalam 30 menit ada 4 mobil yang datang untuk membeli makanan pada restoran tersebut?

Jawaban

Diketahui

Rata-rata jumlah mobil yang datang = 6 mobil dalam 60 menit

λ = dalam 30 menit = 3 mobil

$x = 4$

Untuk menghitung probabilitas poisson dapat menggunakan dua cara yaitu:

a. Menggunakan rumus fungsi poisson

Maka probabilitas ada 4 mobil yang membeli dalam 30 menit adalah :

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(4) = \frac{3^4 2,71828^{-3}}{4!} = 0,1680$$

Jadi probabilitas ada 4 mobil yang membeli adalah 0,1680.

b. Menggunakan tabel probabilitas poisson

x	λ									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai probabilitas untuk $x = 4$ dan $\lambda = 3$ adalah 0,1680

II. Distribusi Probabilitas Kontinyu Seragam

Variabel random kontinyu merupakan sembarang nilai dalam suatu interval atau dalam sekelompok interval. Suatu hal yang mustahil untuk membahas probabilita suatu nilai tertentu dari variabel random kontinyu. Namun demikian kita dapat membahas probabilita variabel random yang diasumsikan sebagai sebuah nilai dalam suatu interval tertentu.

Probabilita suatu nilai variabel random dalam interval x_1 sampai x_2 didefinisikan sebagai daerah di bawah grafik fungsi kepadatan probabilita (*probability density function*) antara x_1 dan x_2

Variabel random terdistribusi secara seragam manakala probabilitanya proporsional terhadap panjang interval

Rumus untuk mencari fungsi kepadatan probabilitas (*Uniform Probability Density Function*) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = 1/(b - a) \quad \text{untuk } a \leq x \leq b$$

$$= 0 \quad \text{untuk lainnya}$$

Dimana :

a = nilai terkecil yang dapat diasumsikan dari variabel

b = nilai terbesar yang dapat diasumsikan dari variabel

Untuk mencari Expected Value dari x adalah sebagai berikut:

$$E(x) = (a + b)/2$$

Untuk mencari Variance dari x adalah sebagai berikut:

$$\text{Var}(x) = (b - a)^2/12$$

Contoh 2:

Pada sebuah restoran Shabu Hachi menetapkan biaya tertentu kepada para pelanggannya dalam mengambil salad. Berdasarkan sampel diketahui bahwa jumlah salad yang diambil terdistribusi secara seragam antara 5 sampai 15 ons

Dari kasus tersebut yang ditanyakan adalah:

- Berapa probabilita seorang pelanggan akan mengambil salad antara 12 dan 15 ons?
- Berapa expected value kasus tersebut?
- Berapa variansnya?

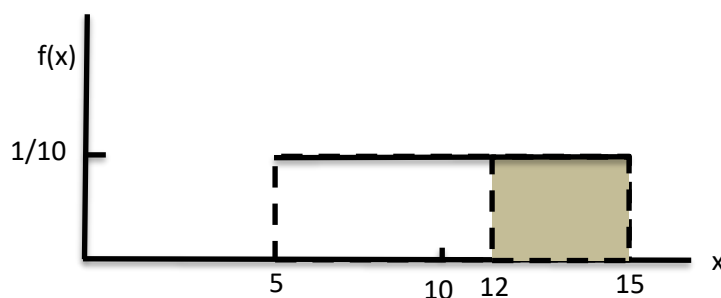
Jawaban

- Kita dapat menghitung fungsi kepadatan probabilitasnya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = 1/(b - a) \quad \text{untuk } a \leq x \leq b$$

$$f(x) = 1/(15 - 5) \quad \text{untuk } 5 \leq x \leq 15$$

$$f(x) = 1/10$$



$$\text{Probabilitas} = P(12 \leq x \leq 15) = 1/10(3) = 0,3$$

b. Untuk menghitung expected value adalah sebagai berikut:

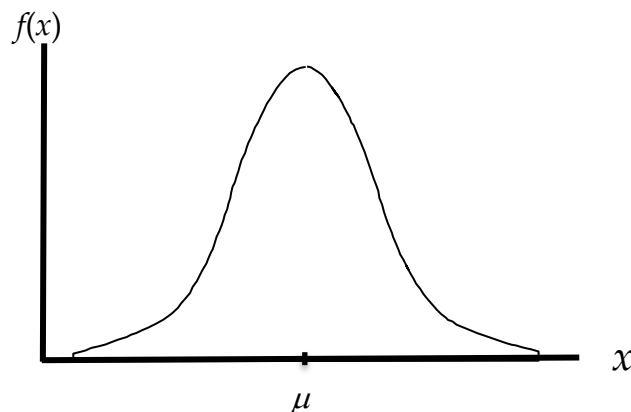
$$\begin{aligned} E(x) &= (a + b)/2 \\ &= (5 + 15)/2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

c. Untuk menghitung variance adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= (b - a)^2/12 \\ &= (15 - 5)^2/12 \\ &= 8.33 \end{aligned}$$

III. Distribusi Probabilitas Normal

Distribusi probabilitas yang dapat digunakan untuk menggambarkan variabel random kontinu adalah distribusi probabilitas normal. Distribusi probabilitas normal biasanya banyak digunakan dalam masalah situasi praktis, dan fungsi kerapatan probabilitasnya berbentuk kurva lonceng yang dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Rumus untuk mencari fungsi kerapatan probability normal adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

di mana:

μ = mean atau expected value dari variabel random x

σ = standar deviasi

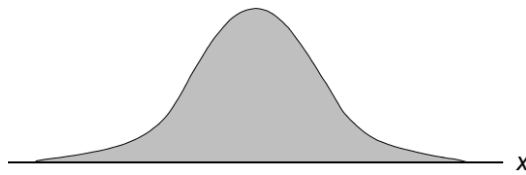
σ^2 = varian

π = 3.14159

e = 2.71828

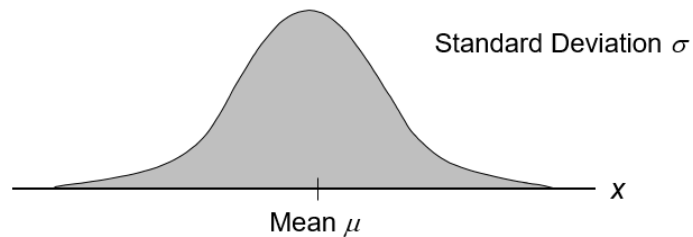
Karakteristik Distribusi Probabilita Normal adalah:

- Bentuk kurva normal seringkali digambarkan sebagai kurva berbentuk lonceng (bell-shaped curve).



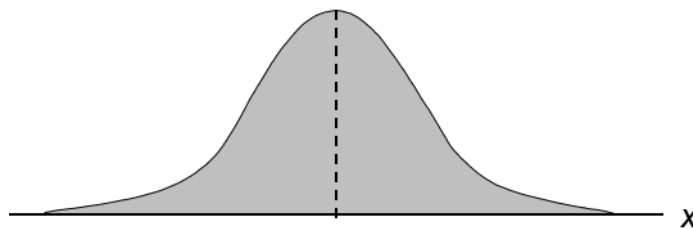
Gambar 4. Grafik disribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Dua Parameter, m (mean) and σ (standard deviation), menentukan sentral dan bentuk distribusi.



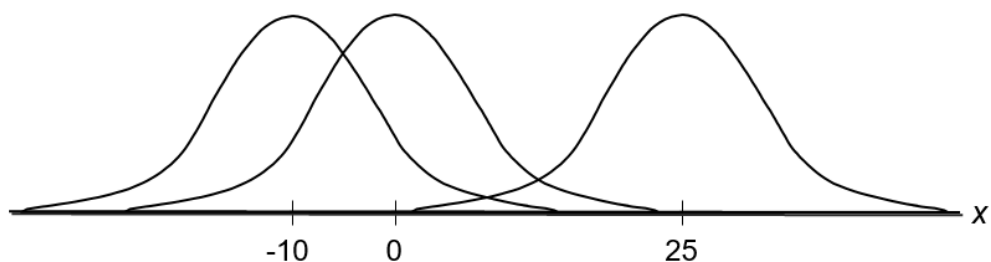
Gambar 5. Grafik disribusi probabilitas normal dengan sumbu x dan mean μ

- Titik tertinggi dari kurva normal berada pada meannya yang juga merupakan median dan modus.



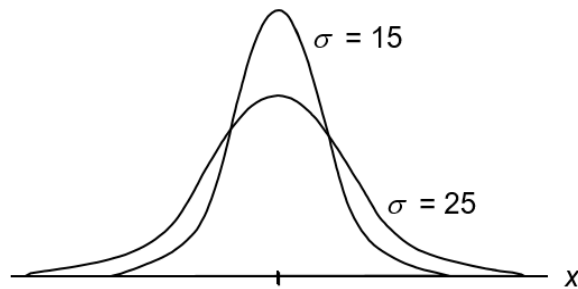
Gambar 6. Grafik disribusi probabilitas normal dengan median dan modus

- Mean dapat berupa sembarang nilai numerik: negatif, nol, atau positif



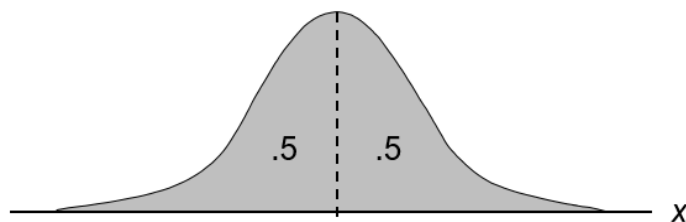
Gambar 7. Grafik persebaran disribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Kurva normal adalah simetris.
- Standar deviasi menentukan lebar kurva: semakin besar nilainya kurva semakin lebar dan mendatar.



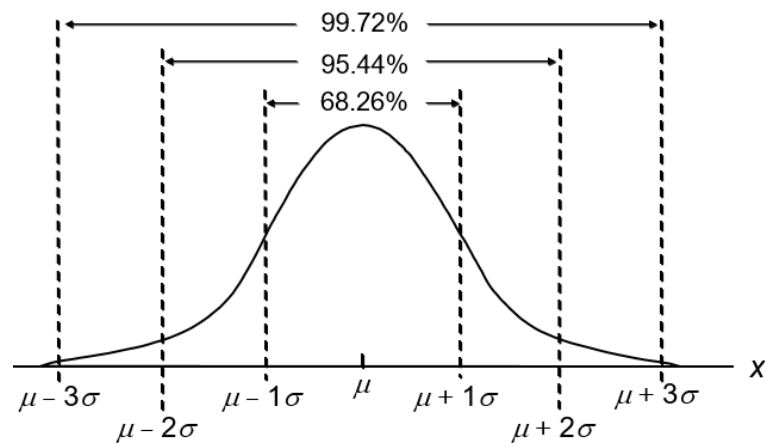
Gambar 8. Grafik distribusi probabilitas normal dengan ketinggian yang berbeda

- Luas total daerah di bawah kurva adalah 1 (0.5 di sebelah kiri mean dan 0.5 di sebelah kanan).



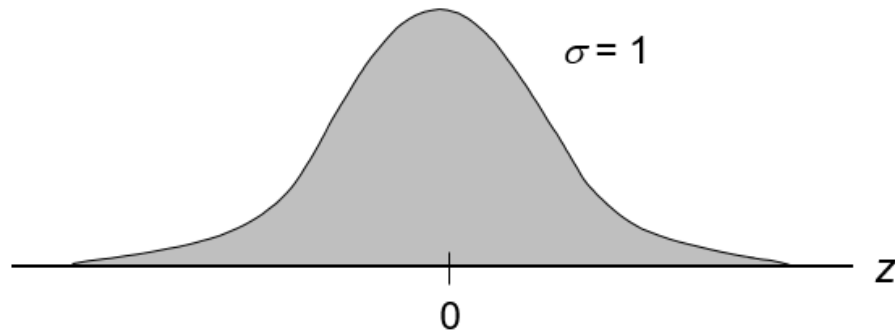
Gambar 9. Grafik distribusi probabilitas normal dengan luas area yang sama

- Probabilita variabel random normal ditunjukkan oleh daerah di bawah kurva
- Persentasi (%) nilai dalam beberapa interval yang biasa digunakan
 - **68.26%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 1 standard deviation** dari meannya.
 - **95.44%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 2 standard deviations** dari meannya.
 - **99.72%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 3 standard deviations** dari meannya.



Gambar 10. Grafik standar distribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Variabel random yang berdistribusi normal dengan mean sama dengan nol dan standar deviasi satu dikatakan memiliki Distribusi Probabilita Normal standar.
- Huruf z biasa digunakan untuk melambangkan variabel random normal ini
- Huruf z (z score) digunakan untuk menunjuk variabel random normal standar maksudnya z score ini merupakan nilai variabel random seberapa kalinya dari standar deviasi.



Gambar 11. Grafik distribusi probabilitas normal dengan sumbu z

Untuk mengkonversi ke dalam Distribusi Probabilita Normal Standar dengan rumusnya adalah sebagai berikut:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dimana:

z = nilai dari z score sebagai ukuran berapa standar deviasi x dari μ

x = titik batas jarak dari μ

μ = mean

σ = stadar deviasi

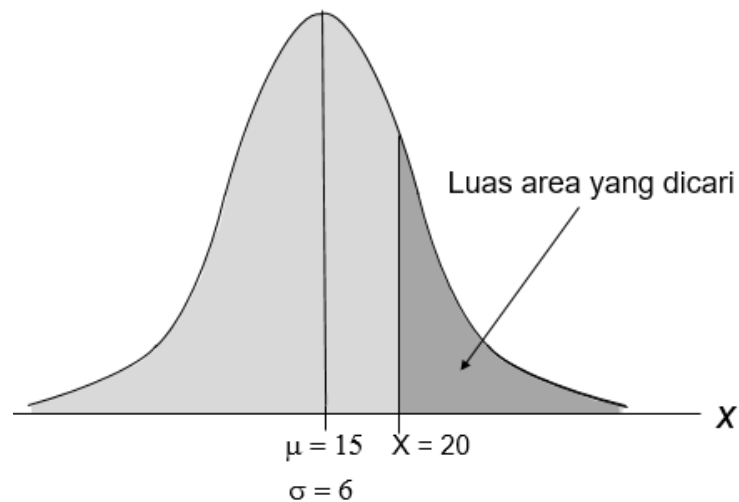
Contoh 3

Toko Pep Zone menjual oli kendaraan bermotor. Ketika stok oli berada di bawah 20 gallon, dilakukan pemesanan ulang stok.

Manajer Toko tidak menginginkan kehilangan peluang penjualan akibat kehabisan stok selama menunggu kiriman barang. Dari data penjualan diketahui bahwa jumlah permintaan selama waktu pengisian kembali stok terdistribusi normal dengan mean 15 gallon dan standar deviasi 6 gallon.

Manajer tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya stockout, $P(x > 20)$

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 12. Grafik contoh kasus 2 distribusi probabilitas normal

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan x ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 z &= (x - \mu) / \sigma \\
 &= (20 - 15) / 6 \\
 &= 0.83
 \end{aligned}$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal kumulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri $z = 0.83$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
.

$$P(z \leq .83) = .7967$$

Gambar 13. Tabel distribusi normal kumulatif z positif

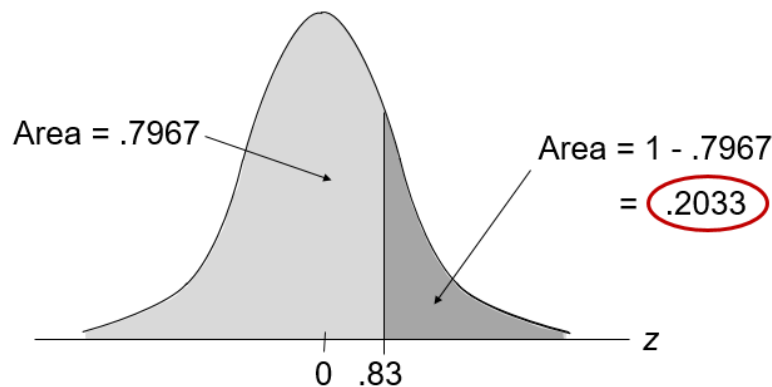
- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah

angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu 0,83, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,7967. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kanan.

- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kanan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(z > .83) &= 1 - P(z \leq .83) \\
 &= 1 - .7967 \\
 &= .2033
 \end{aligned}$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 14. Grafik contoh kasus 2 distribusi probabilitas normal sumbu z

Tabel distribusi normal kumulatif terdiri dari 2 bagian yaitu tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) dan tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) dengan penjelasa seperti berikut:

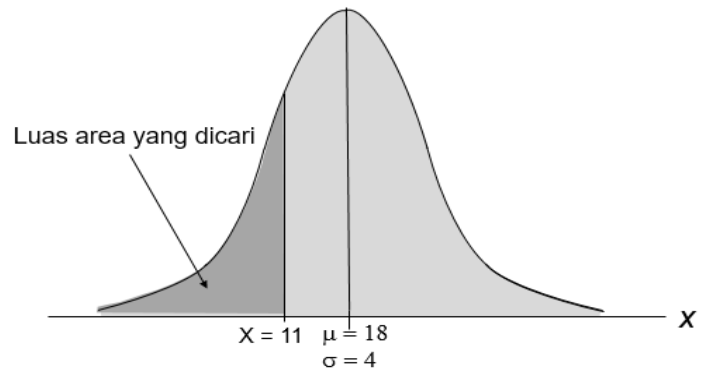
1. Tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya positif (+) artinya titik dari x berada dibeselah kanan dari mean nya. Luas area sebelah kanan sama dengan 1 dikurangi dengan nilai yang didapat pada tabel.
2. Tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya negatif (-) artinya titik dari x berada dibeselah kiri dari mean nya. Luas area sebelah kiri sama dengan nilai yang didapat pada tabel.

Contoh 4

Seorang pedagang dapat menjual baju dengan rata-rata 18 potong setiap minggunya dengan standar deviasi 4 potong. Berapa probabilitasnya pedagang tersebut dapat menjual bajunya lebih sedikit dari 11 potong?

Pedagang tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya penjualan, $P(x < 11)$

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 15. Grafik contoh kasus 3 distribusi probabilitas normal sumbu x

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan x ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 z &= (x - \mu) / \sigma \\
 &= (11 - 18) / 4 \\
 &= - 1.75
 \end{aligned}$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal komulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri z = - 1.75

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495

P(Z ≤ - 1,75) = 0,0401

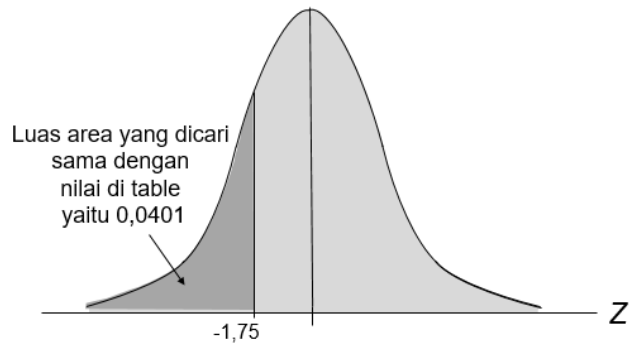
Gambar 16. Tabel distribusi normal komulatif Z negatif

- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan sampai 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu - 1,75, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,0401. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kiri.

- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kiri adalah sebagai berikut:

$$P(z \leq -1.75) = 0,0401$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



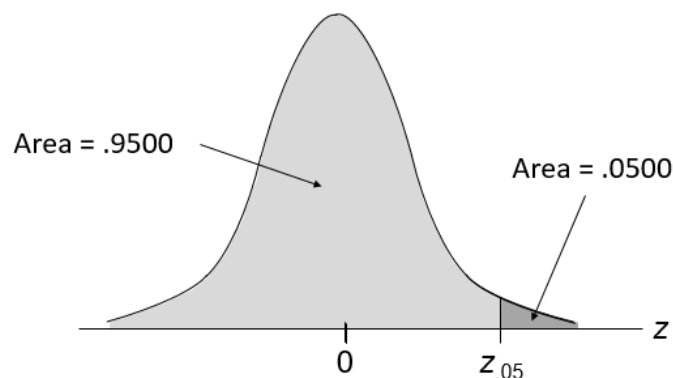
Gambar 17. Grafik contoh kasus 3 distribusi probabilitas normal sumbu z

Contoh 5

Dari contoh kasus 1 Jika manajer Pep Zone menginginkan probabilita kehabisan stioek tidak lebih dari 0.05, berapa seharusnya titik pemesanan kembali?

Manajer tersebut ingin mengetahui berapa jumlah gallon pemesanan kembali (X) dengan nilai probabilitasnya terjadinya stockout tidak lebih dari 0,05.

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 18. Grafik contoh kasus 4 distribusi probabilitas normal sumbu z

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Mencari Z score dengan area yang ada disebelah kiri dari titik $Z_{0,05}$ Menghitung besar nilai area sebelah kiri dapat dilihat seperti berikut:
- busi normal standar seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{Area kiri dari } Z_{0,05} &= 1 - 0,05 \\ &= 0,9500 \end{aligned}$$

- Penentuan nilai Z score dapat dilihat pada tabel distribusi normal kumulatif sebelah kanan, kemudian kita lihat dengan nilai area 0,95 berada dimana pada bagian nilai area di tabel seperti gambar berikut:

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

$$Z_{(0,95)} = 1,645$$

Gambar 19. Tabel distribusi normal kumulatif z positif

- Pada tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai Z score dengan area 0,95 pada tabel distribusi normal kumulatif sebelah kanan, nilai Z = 1,645
- Setelah didapat nilai Z score nya, kemudian dapat dicari nilai x yang ditanyakan dengan menggunakan rumus Z seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 z_{0,95} &= (x - \mu) / \sigma \\
 x &= \mu + z_{0,95} \sigma \\
 &= 15 + 1.645(6) \\
 &= 24.87 \text{ atau dibulatkan } 25
 \end{aligned}$$

Dengan demikian Pep Zone sebaiknya menentukan titik pengisian kembali pada 25 gallon untuk menjaga probabilita kehabisan stok sebesar 0.05

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.