Modul Kuliah ke 7
TPK

Time Introduction to Linear Programming

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami konsep *Linear Programming.*
2. Memahami *Simple Maximization Problem.*
3. Memahami *Graphical Solution Procedure*

I. Konsep *Linear Programming*

Pemrograman linier adalah pendekatan pemecahan masalah yang dikembangkan untuk membantu manajer membuat keputusan. Sejumlah aplikasi pemrograman linier dapat ditemukan dalam lingkungan persaingan bisnis saat ini.

Untuk mengilustrasikan beberapa contoh kasus masalah yang terjadi pada pemrograman linear, Contoh kasus pertimbangkan yang dihadapi industri diantaranya seperti berikut:

a. Sebuah Pabrik ingin mengembangkan jadwal produksi dan kebijakan persediaan untuk memenuhi permintaan penjualan di masa mendatang. Idealnya, jadwal dan kebijakan yang akan memungkinkan bagi perusahaan untuk memenuhi permintaan dan pada saat yang sama meminimalkan total biaya produksi dan persediaan.
b. Seorang analis keuangan harus memilih portofolio investasi dari berbagai saham dan alternatif investasi obligasi. Seorang analis ingin menetapkan portofolio itu memaksimalkan laba atas investasi.
c. Seorang manajer pemasaran ingin menentukan cara terbaik untuk mengalokasikan anggaran tetap biaya iklan di antara media iklan alternatif seperti radio, televisi, koran, dan majalah. Manajer ingin menentukan kombinasi media yang dipakai dalam memaksimalkan efektivitas dari iklan yang akan dipilih.
d. Sebuah perusahaan memiliki gudang di sejumlah lokasi. Dengan adanya permintaan khusus dari pelanggan, perusahaan ingin menentukan berapa banyak masing-masing gudang akan mengirim ke setiap pelanggan sehingga total biaya transportasi dapat diminimalkan.

II. Masalah *Simple Maximization*

Untuk memahami pemecahan masalah *Simple Maximization* dapat dilihat studi kasus berikut ini:

RMC, Inc., merupakan perusahaan kecil yang memproduksi berbagai produk berbahan kimia. Dalam suatu proses produksi tertentu, ada tiga bahan baku digunakan untuk menghasilkan dua produk yaitu fuel additive dan solvent base. Produk fuel additive akan dijual kepada perusahaan minyak dan produk solvent base akan dijual kepada perusahaan kimia dan industri kebersihan. Untuk membuat 2 produk tersebut diperlukan 3 jenis bahan baku dengan jumlah yang berbedabeda pada tiap produknya. Kebutuhan material bahan baku pada setiap produk dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 1. Kebutuhan material pada dua produk

	Product	
	Fuel Additive	**Solvent Base**
Material 1	0.4	0.5
Material 2		0.2
Material 3	0.6	0.3

0.6 tons of material 3 is used in each ton of fuel additive

Produksi RMC dibatasi oleh ketersediaan terbatas dari ketiga bahan baku. Untuk periode produksi saat ini, RMC telah menyediakan jumlah masing-masing bahan baku dalam jumlah berikut

Tabel 2. Ketersediaan maksimal material

Material	**Amount Available for Production**
Material 1	20 tons
Material 2	5 tons
Material 3	21 tons

Karena sifat material dapat mengalami pembusukan pada proses produksi, bahan material yang tidak digunakan produksi saat ini tidak berguna dan harus dibuang. Dari bagian departemen akuntansi menetapkan harga pada dua produk tersebut akan profit yaitu untuk produk fuel additive $40 dan solvent base $30. Maka kita dapat menentukan jumlah kedua produk dengan menggunakan program linear untuk menentukan profit yang maksimal.

Untuk menjawab permasalahan di atas dapat diikuti langkah berikut:

a. Formulasi masalah

Formulasi masalah adalah proses menerjemahkan pernyataan verbal dari suatu masalah menjadi pernyataan matematika. Pernyataan matematis dari masalah ini disebut sebagai model matematika. Kita harus memahami kasus tersebut agar dapat dibuat persamaan matematisnya.

Pada kasus RMC ingin menentukan berapa banyak masing-masing produk yang akan diproduksi untuk memaksimalkan kontribusi total terhadap laba. Jumlah ton tersedia untuk tiga bahan yang ada diperlukan untuk menghasilkan dua produk akan membatasi jumlah ton setiap produk yang bisa dihasilkan. Pemahaman yang baik dapat membuat langkah pertama dengan mengembangkan model matematika.

- Tuliskan Objective dari tujuan RMC untuk memaksimalkan kontribusi jumlah produk total terhadap laba (profit yang ingin dicapai)

- Tuliskan constaint dari ketiga material untuk membatasi jumlah ton untuk produk fuel additiv dan solvent base yang dapat diproduksi
  Constraint 1: Jumlah ton dari material 1 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 20 ton
  Constraint 2: Jumlah ton dari material 2 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 5 ton.
  Constraint 3: Jumlah ton dari material 3 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 21 ton

- Tentukan Variabel Keputusan Variabel keputusan adalah input yang dapat dikontrol pada masalah.
- Untuk masalah RMC, kedua variabel keputusan tersebut adalah (1) jumlah ton fuel additiv yang diproduksi, dan (2) jumlah ton solvent base yang diproduksi. Dalam mengembangkan model matematika untuk masalah RMC, kita akan menggunakan notasi berikut untuk variabel keputusan:

  F jumlah ton dari fuel additive
  S jumlah ton dari solvent base

- Tuliskan objektiv untuk memaksimalkan profit pada kasus RMC's dengan harga \$40 pada produk fuel additive dan \$30 pada produk solvent base, maka persamaan total maximize seperti berikut:

  Kontribusi total profit = 40F + 30S

- Dari kontribusi total profit di atas kita dapat menuliskan persamaan maximize seperti berikut:

  Max 40F + 30S

- Tuliskan constrain dari variabel keputusannya:

  Constraint 1:

  Jumlah ton dari material 1 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 1 yang tersedia

  Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

  Jumlah tons dari material 1 yang digunakan = 0.4F + 0.5S

  Dikarenakan jumlah material 1 yang tersedia = 20 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 1 adalah:

  $0.4F + 0.5S \leq 20$

Constraint 2:

Jumlah ton dari material 2 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 2 yang tersedia

Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

Jumlah tons dari material 2 yang digunakan = 0.2S

Dikarenakan jumlah material 2 yang tersedia = 5 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 2 adalah:

$$0.2S \leq 5$$

Constraint 3:

Jumlah ton dari material 3 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 3 yang tersedia

Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

Jumlah tons dari material 3 yang digunakan = 0.6F + 0.3S

Dikarenakan jumlah material 1 yang tersedia = 21 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 3 adalah:

$$0.6F + 0.3S \leq 21$$

Tambahkan Constraint untuk masing-masing produk tidak negatif atau lebih besar dari nol seperti berikut ini:

$$F \geq 0 \text{ and } S \geq 0$$

Untuk menuliskan constrain tersebut, maka pernyataan matematiknya dapat ditulis seperti berikut:

$$F, S \geq 0$$

Pada masalah RMC, kita dapat menuliskan model matematik dengan formulasi masalahnya secara lengkap seperti berikut:

Model Matematik untuk masalah RMC :

$$\begin{array}{lll}
\text{Max } 40F + 30S & & \\
\text{Subject to (s.t.)} & & \\
 & 0.4F + 0.5S \leq 20 & \text{Material 1} \\
 & 0.2S \leq 5 & \text{Material 2} \\
 & 0.6F + 0.3S \leq 21 & \text{Material 3} \\
 & F, S \geq 0 &
\end{array}$$

Dari model matematik di atas kita dapat mencari solusinya dengan menghitung berapa jumlah F dan jumlah S dengan menggunakan persamaan matematik.

III. Metode *Graphical Solution*

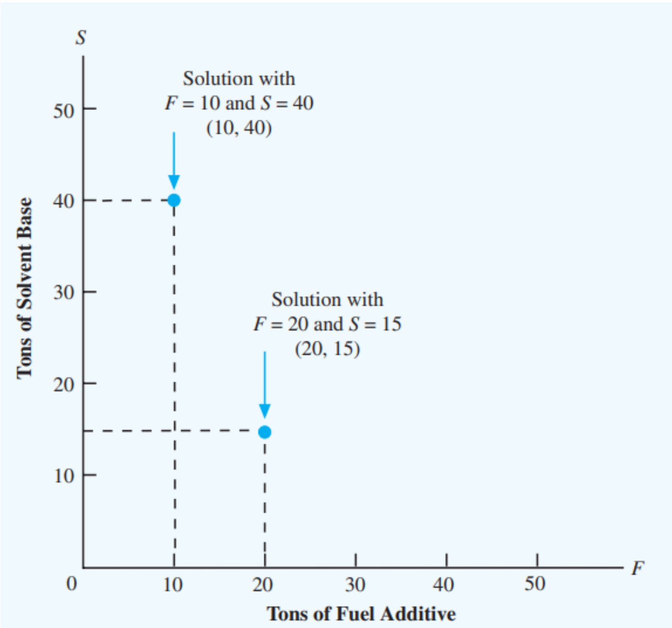
Masalah pemrograman linier yang menggunakan dua variabel keputusan dapat diselesaikan dengan menggunakan prosedur solusi grafik. Kita mulai dengan cara menggambarkan dari setiap persamaan nilai dari variabel F dan variabel S dengan F sebagai variabel pada garis horizontal X dan S pada garis vertical Y. Nilai dari variabel F dan adalah tidak negatif maka dapat dinyatakan bahwa variabel $F \geq 0$ dan variabel $S \geq 0$.

Sebelumnya kita telah menentukan persamaan untuk constrain material 1 adalah:

$$0.4F + 0.5S \leq 20$$

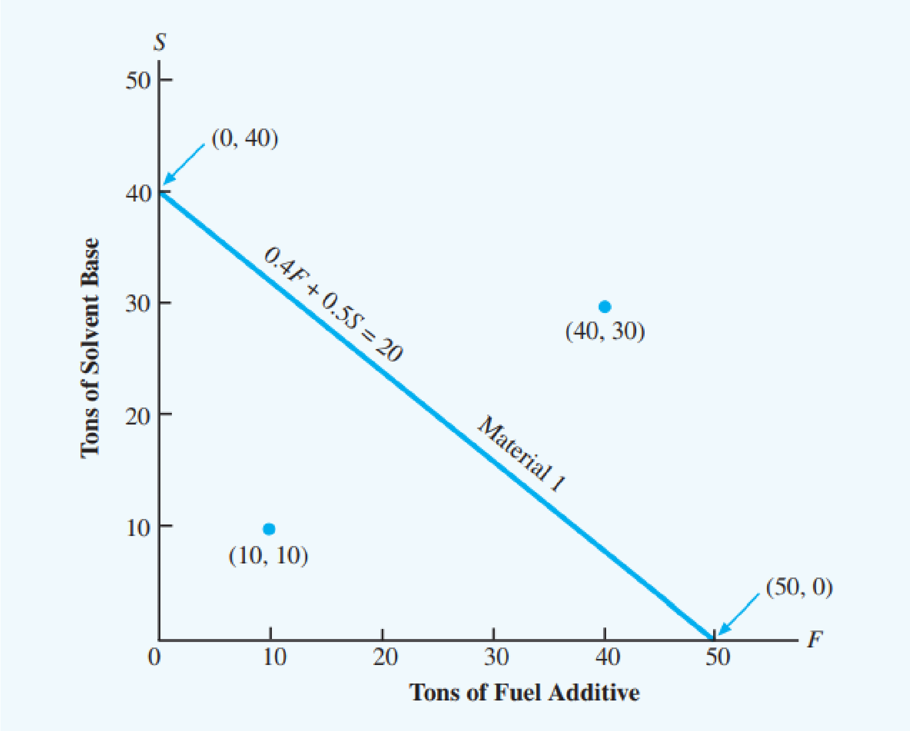
Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.4F + 0.5S = 20$$



Gambar 1. Grafik menggambarkan persamaan material 1

Kemudian kita gambar garisnya yang menunjukkan persamaan pada materail 1 seperti berikut ini:



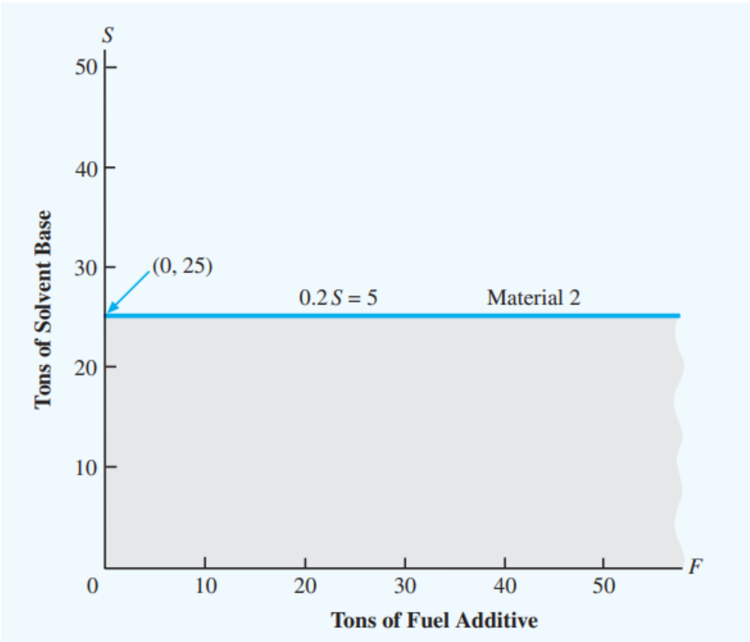
Gambar 2. Grafik menggambarkan garis persamaan material 1

Kemudian kita dapat menentukan persamaan untuk constrain material 2 adalah:

$$0.2S \leq 5$$

Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.2S \leq 5$$



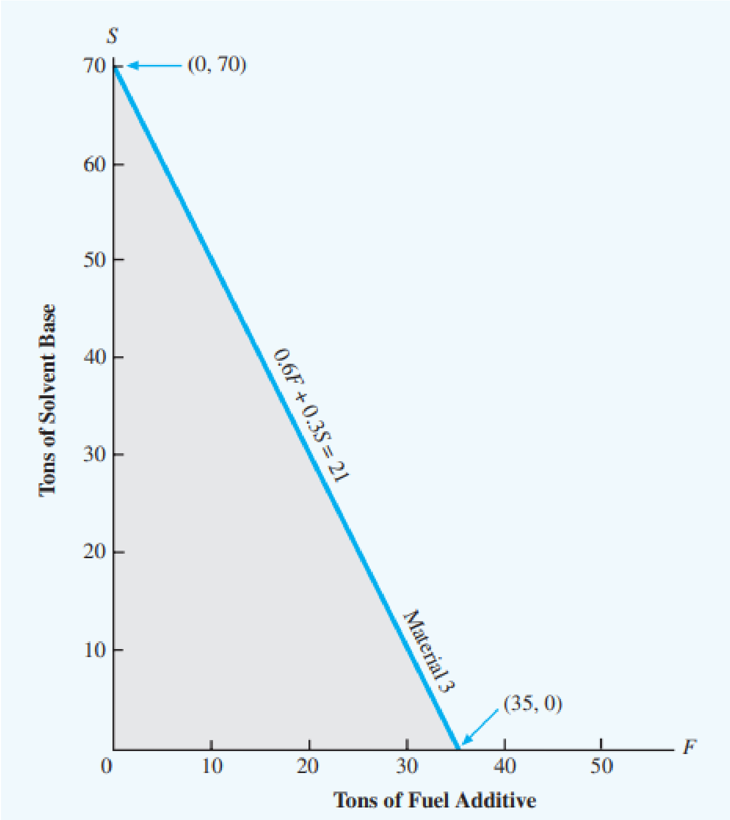
Gambar 3. Grafik menggambarkan persamaan material 2

Selanjutya kita telah menentukan persamaan untuk constrain material 3 adalah:

$$0.6F + 0.3S \leq 21$$

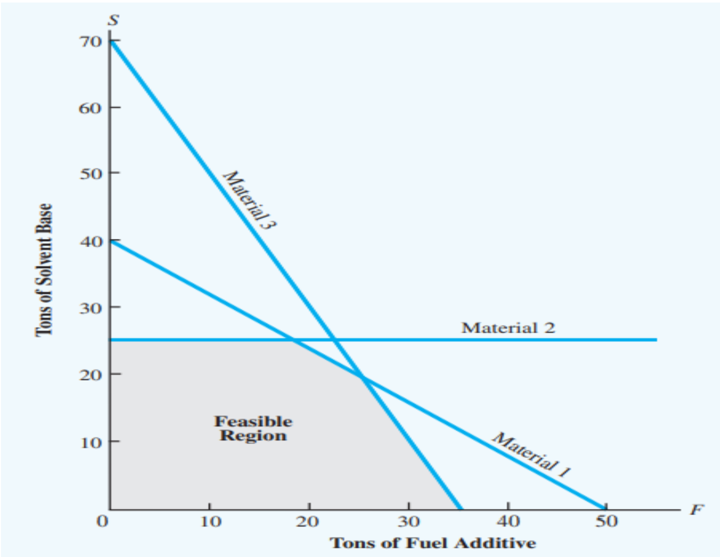
Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.6F + 0.3S = 21$$



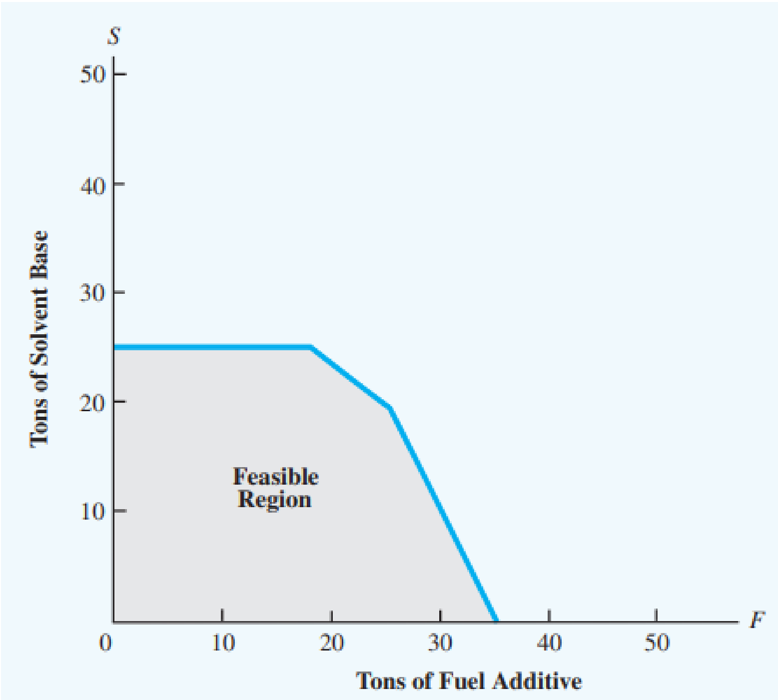
Gambar 4. Grafik menggambarkan persamaan material 3

Hasil dari ketiga grafik solusi diatas dapat kita gabungkan seperti gambar berikut ini:



Gambar 5. Grafik menggambarkan garis 3 persamaan

Dari grafik di atas kita dapat menggambarkan titik-titik persimpangannya seperti berikut:

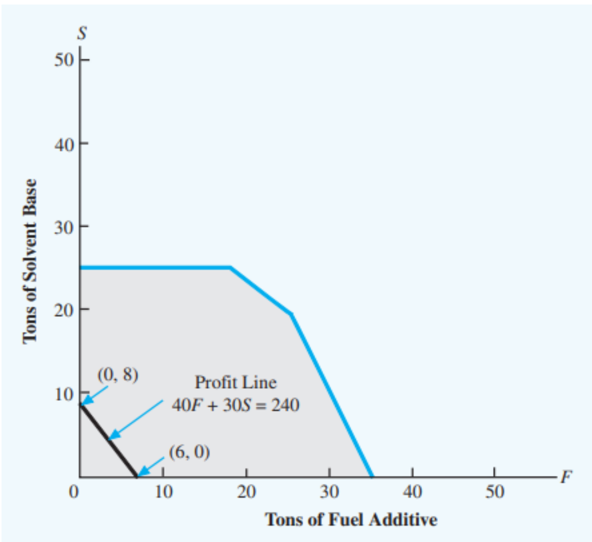


Gambar 6. Grafik menggambarkan titik yang posible

Untuk menentukan titik mana yang paling optimal, kita dapat menggambarkan garis persamaan maximize dengan asumsi total kita tentukan sendiri agar dapat menggambarkan garis dari persamaan maximize dengan persamaannya seperti berikut:

$$40F + 30S = 240$$

Dari persamaan tersebut dapat kita lihat gambarnya seperti berikut:

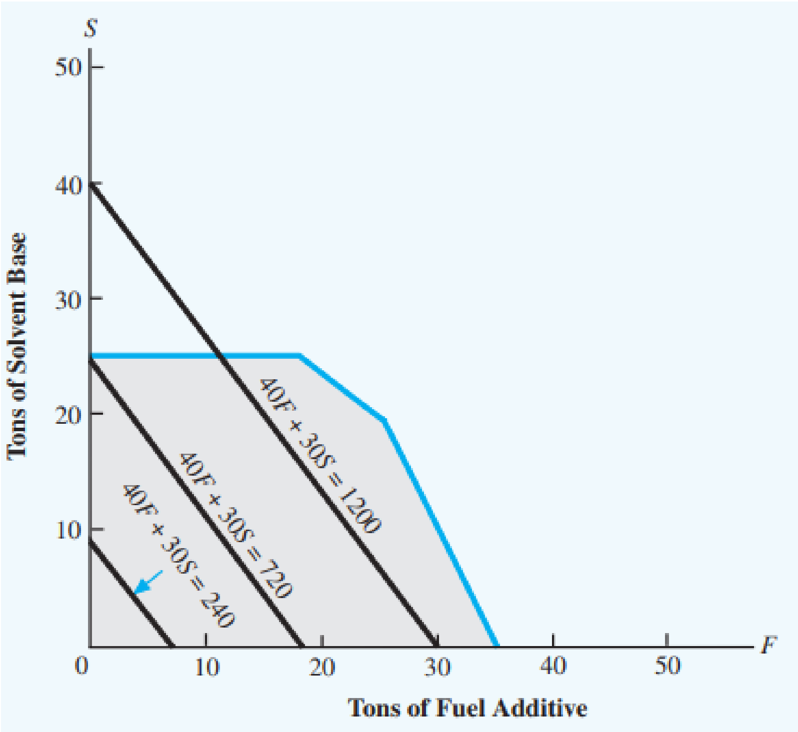


Gambar 7. Grafik menggambarkan garis persamaan maximize

Kita dapat mencari garis maximize yang yang lebih besar agar dapat menampilkan garis yang mendekati titik dari optimalnya. Persamaaannya seperti berikut:

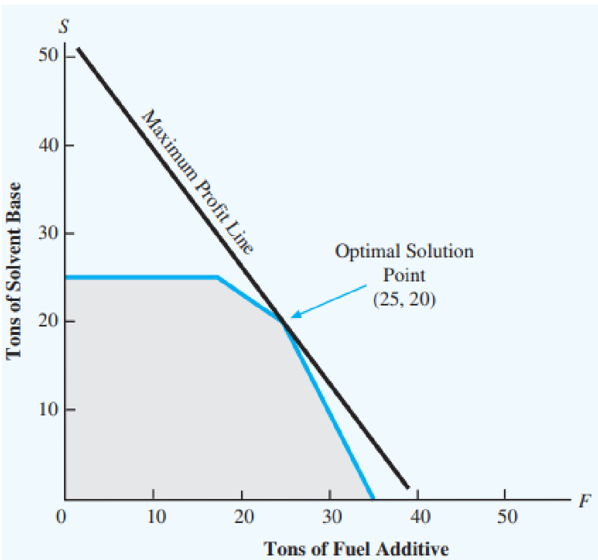
$$40F + 30S = 720$$
$$40F + 30S = 1200$$

Dari persamaan tersebut dapat kita lihat gambarnya seperti berikut:



Gambar 8. Grafik menggambarkan 3 garis persamaan maximize

Kita dapat menggeser garis maximize tersebut sesuai dengan kemiringan yang sama, maka hasilnya dapat kita lihat seperti gambar berikut:



Gambar 9. Grafik menggambarkan 3 garis persamaan maximize

Hasil dari gambar di atas, kita dapat menemukan solusi untuk masalah kasus ini adalah pertemuan antara persamaan material 1 dan persamaan material 3. Kita dapat mencari berapa jumlah untuk F dan S seperti berikut:

$$0.4F + 0.5S = 20 \quad \text{material 1}$$

Dan persamaan

$$0.6F + 0.3S = 21 \quad \text{material 3}$$

Dari kedua persamaan tersebut kita dapat mencari besar nilai F dan nilai S dengan cara subtitusi atau eliminasi. Untuk cara subtitusi dapat kita lakukan seperti berikut:

Pada persamaan material 1 :

$$\begin{aligned} 0.4F &= 20 - 0.5S \\ F &= \frac{20 - 0.5S}{0.4} \\ F &= 50 - 1.25S \end{aligned}$$

Hasil dari persamaan tersebut kita subtitusikan pada persamaan kedua dengan hasil seperti berikut:

$$\begin{aligned} 0.6(50 - 1.25S) + 0.3S &= 21 \\ 30 - 0.75S + 0.3S &= 21 \\ -0.45S &= -9 \\ S &= 20 \end{aligned}$$

Setelah nilai dari S didapat, kita dapat memasukkan hasilnya pada persamaan pertama seperti berikut:

$$\begin{aligned} F &= 50 - 1.25(20) \\ &= 50 - 25 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Setelah nilai dari variabel F dan variabel S didapat, kita dapat memasukkan nilai tersebut pada Persamaan maximize untuk mendapatkan nilai objektivnya dari tujuan persamaannya untuk mendapatkan total profit yang maksimal seperti berikut:

$$\text{Max} \rightarrow \quad 40(25) + 30(20) = \$1600$$

Hasil dari perhitungan maximize tersebut menyatakan bahwa hasil profit dari penjualan kedua produk fuel additive dan solvent base sebesar $1600.

IV. Slack Variables

Selain solusi optimal dan kontribusi laba terkait, para manajer RMC akan menginginkan informasi tentang persyaratan produksi untuk tiga bahan. Kita dapat tentukan informasi ini dengan mensubstitusi nilai solusi optimal (F = 25, S= 20) ke pada program linier. Hasil dari perhitungan memasukkan jumlah produk F sebesar 25 dan jumlah produk S sebesar 20 pada masing-masing persamaan material 1 , material 2 dan material 3, hasilnya dapat dilihat seperti tabel berikut ini:

Tabel 3. Hasil total material yang terpakai

Constraint	Tons Required for $F = 25, S = 20$ Tons	Tons Available	Unused Tons
Material 1	$0.4(25) + 0.5(20) = 20$	20	0
Material 2	$0.2(20) = 4$	5	1
Material 3	$0.6(25) + 0.3(20) = 21$	21	0

Hasil dari tabel di atas dapat kita lihat bahwa, solusi optimal dari persamaan yang telah kita cari untuk menentukan jumlah produksi sebanyak 25 ton produk fuel additive dan produk solvent sebesar 20 ton yang membutuhkan bahan baku material 1, material 2 dan material 3 yang tesedia. Hasilnya ternyata untuk material 1 dan material 3 habis, tetapi untuk material 2 masih tersisa 1 ton yang tidak terpakai. 1 ton material 2 yang tidak terpakai ini disebut slack atau disebut juga variabel slack (S). Slack ini dapat didefinisikan untuk masing-masing kebutuhan materialnya. Dikarenakan material pada kasus ini ada tiga material yang dibutuhkan dalam pembuatan dua produk fuel additive dan solvent base, maka slack yang ditambahkan menjadi 3 yaitu S_1, S_2 dan S_3. Untuk intu model persamaan matematiknya dapat ditulis seperti berikut ini:

$$\text{Max } 40F + 30S + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to (s.t.)

$$0.4F + 0.5S = 20$$
$$0.2S = 5$$
$$0.6F + 0.3S = 21$$
$$F, S, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Dari kasus ini, maka hasil yang paling optimal untuk kasus tersebut dengan jumlah nilai dari variabel F = 25 dan nilai variabel S = 20, maka untuk variabel slack nya adalah:

Tabel 4. Hasil variabel slack

Constraint	Value of Slack Variable
Material 1	$S_1 = 0$
Material 2	$S_2 = 1$
Material 3	$S_3 = 0$

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.