INDONESIA
BANKING
SCHOOL

MODUL KULIAH

TEORI PENGAMBILAN KEPUTUSAN

OLEH :

DENI WARDANI, S.T., M.T.I.

PROGRAM STUDI MANAJEMEN
STIE INDONESIA BANKING SCHOOL
2020

KATA PENGANTAR

Segala Fuji dan Rahmat dilimpahkan kepada Yang Maha Pencipta atas selesainya Modul Teori Pengambilan Keputusan ini sebagai bahan dalam mengajar mata kuliah Teori Pengambilan Keputusan untuk Mahasiswa di lingkungan STIE Indonesia Banking School.

Materi dalam modul ini disusun berdasarkan kebutuhan mahasiswa didalam memahami konsep pengambilan keputusan yang dapat digunakan pada level manajemen khususnya pengambilan keputusan menggunakan data kuantitatif. Materi modul ini juga disesuaikan dengan perkembangan konsep pengambilan keputusan secara data kuantitatif.

Modul ini berisi materi mengenai konsep probabilitas, distribusi probabilitas, pengambilan keputusan tanpa probabilitas, pemilihan keputusan dengan probabilitas, teori permainan, forcasting, persamaan linear, penjadwalan proyek, inventory, konsep antrian dan Markov proses, sehingga dengan menguasai dan memahami konsep dan cara penghitungan alternatif pilihan tersebut diharapkan dapat berguna bagi mahasiswa dalam memahami penggunaan konsep pengambilan keputusan secara kuantitatif dan apabila setelah selesai kuliah nanti dan terjun ke dunia kerja diharapkan mahasiswa sudah terbiasa dengan konsep ini.

Dalam pembuatan modul ini banyak pihak-pihak yang membantu dalam menyelesaikan modul ini, untuk itu penyusun mengucapkan banyak terima kasih yang sebesar-besarnya atas saran, kritikan dan bantuan yang telah dicurahkan dalam penyelesaian modul ini.

Penyusun menyadari masih banyak kekurangan-kekurangan dalam materi ini, sehingga besar harapan kami apabila ada saran dan kritikan untuk memperbaiki dan menyempurnakan modul ini dapat disampaikan kepada kami.

Akhir kata, penyusun berharap modul ini dapat berguna dan dapat dipergunakan bagi siapa saja yang membutuhkan materi ini dan kami mohon maaf apabila masih banyak kekurangannnya.

Wasalam.

Penulis

DAFTAR ISI

Modul Kuliah ke 1

TPK

Probabilitas

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep probabilitas.
2. Memahami metode probabilitas.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus

1.1. Konsep Probabilitas

Keputusan bisnis seringkali didasarkan pada analisis ketidakpastian seperti berikut ini:

1. Apa "peluang" penjualan akan menurun jika kita menaikkan harga?
2. Apa "kemungkinan" apabila menggunakan metode perakitan baru akan dapat meningkatkan produktivitas?
3. Seberapa "mungkin" proyek akan selesai tepat waktu?
4. Apa "peluang" bahwa investasi baru akan menguntungkan?

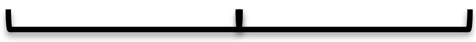
Probabilitas adalah ukuran numerik dari kemungkinan terjadinya suatu peristiwa. Dengan demikian, probabilitas dapat digunakan sebagai ukuran tingkat ketidakpastian yang terkait dengan empat event seperti contoh yang terdaftar di atas. Jika probabilitas dapat ditentukan, maka kami dapat menentukan kemungkinannya dari setiap peristiwa yang terjadi.

Nilai probabilitas ditetapkan pada skala dari 0 hingga 1:

- Probabilitas mendekati 0 mengindikasikan suatu peristiwa sangat kecil kemungkinannya untuk terjadi.
- Probabilitas mendekati 1 mengindikasikan suatu peristiwa sangat besar kemungkinannya untuk terjadi.
- Probabilitas 0.5 mengindikasikan kemungkinan untuk terjadi atau tidaknya suatu peristiwa adalah sama

Probabilitas sangat penting dalam pengambilan keputusan karena dapat memberikan cara untuk mengukur, mengekspresikan, dan menganalisis ketidakpastian yang terkait dengan peristiwa yang akan terjadi di masa depan.

Probabilitas :



0 0.5 1

Istilah yang terkait dengan probabilitas diantaranya:

- Eksperimen adalah suatu proses yang mengakibatkan *outcome* yang dapat terdefinisi dengan baik..

- Ruang sampel (*sample space*) dari suatu eksperimen adalah kumpulan dari seluruh *outcome* dari suatu eksperimen.
- Titik sampel (*sample point*) adalah elemen dari *sample space*, yaitu salah satu dari *outcomes* eksperiment.

Contoh eksperimen dan outcomes seperti berikut:

Tabel 1.1. Eksperimen dengan hasil *Outcome*

Eksperimen	***Outcomes* atau *Sample space***
Melempar koin	Angka dan gambar
Pemeriksaan sparepart	Baik dan cacat
Melempar dadu	1,2,3,4,5,6
Bertanding sepakbola	Menang, kalah, seri

Contoh titik sample misalnya dalam eksperimen melempar dadu, maka hasil yang keluar atau titik sampelnya adalah 4 yang muncul.

1.2. Menentukan Probabilitas Pada Hasil Eksperimental

Dengan pemahaman tentang percobaan/ eksperimen dan ruang sampel, mari kita lihat bagaimana probabilitas hasil dari eksperimen dapat ditentukan. Probabilitas hasil eksperimen adalah ukuran numerik dari kemungkinan hasil eksperimen itu terjadi pada satu pengulangan percobaan. Dalam menetapkan probabilitas hasil eksperimental, dua persyaratan dasar probabilitas harus dipenuhi yaitu :

1. Nilai probabilitas yang ditetapkan untuk setiap hasil eksperimen (titik sampel) harus berada di antara 0 dan 1. Jika kita mendefisikan E_i menunjukkan hasil eksperimental dan $P(E_i)$ menunjukkan probabilitas hasil eksperimen ini, maka dapat kita tuliskan :

   $$0 \leq P(E_i) \leq 1 \quad \text{(untuk semua nilai i)}$$

2. Jumlah semua probabilitas hasil dari eksperimental totalnya harus 1. Sebagai contoh, jika a ruang sampel memiliki hasil eksperimen k, maka dapat kita tuliskan bahwa :

   $$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_i) = 1$$

Metode yang dapat menetapkan nilai probabilitas pada hasil eksperimen yang memenuhi dua persyaratan tersebut untuk menghasilkan ukuran numerik dari kemungkinan hasil yang dapat diterima yaitu metode klasik, metode frekuensi relatif, dan metode subjektif.

1. Metode Klasik
   Penentuan probabilitas berdasarkan asumsi bahwa setiap outcome memiliki kemungkinan terjadi yag sama. Jika suatu eksperimen memiliki n kemungkinan outcomes, maka berdasarkan metode ini setiap outcome akan memiliki probabilita sebesar 1/*n*.
   Contoh :

a. Eksperimen : melempar koin
Sample Space : S = {gambar, angka}
Probabilitas : Tiap sample point memiliki kemungkinan terjadi sebesar 1/2

b. Eksperimen : melempar dadu
Sample Space : S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Probabilitas : Tiap sample point memiliki kemungkinan terjadi sebesar 1/6

2. Metode frekuensi relatif
Penentuan probabilitas berdasarkan data eksperimental atau historis
Contoh:
Suatu perusahaan rental mobil sedang mengamati data jumlah mobil yang disewa oleh pelanggan tiap harinya selama 40 hari terakhir. Berdasarkan data tersebut dapat dihitung probabilitas jumlah mobil yang disewa pada suatu hari melalui metode frekuensi relatif.

Tabel 1.2. Contoh kasus metode frekuensi relatif

Jumlah Mobil Tersewa	Jumlah Hari	Probabiltas
0	4	4/40 = 0,10
1	6	6/40 = 0,15
2	18	18/40 = 0,45
3	10	10/40 = 0,25
4	2	2/40 = 0,05
Jumlah	40	1

3. Metode subjektif
Penentuan probabilitas berdasarkan judgment peneliti. Metode subyektif dalam menetapkan probabilitas paling tepat ketika kita tidak dapat secara realistis berasumsi bahwa hasil eksperimen yang tersedia hanya sedikit data yang relevan. Metode subjektif digunakan dalam menetapkan hasil percobaan probabilitas dengan semua informasi baik yang didapatkan dari pengalaman atau intuisi. Setelah mempertimbangkan semua informasi yang tersedia, nilai probabilitas yang menyatakan tingkat kepercayaan (pada skala dari 0 hingga 1) bahwa hasil eksperimen yang akan terjadi dapat ditentukan. Karena probabilitas subyektif mengungkapkan tingkat kepercayaan seseorang, itu bersifat pribadi. Menggunakan metode subjektif pada orang yang berbeda dapat menetapkan probabilitas yang berbeda juga pada hasil percobaan yang sama.
Contoh :
Kasus pertimbangan oleh Tom dan Judy Elsbernd yang baru saja mengajukan penawaran untuk membeli sebuah rumah. Ada dua hasil yang mungkin yaitu:

E_1 = Tawaran mereka disetujui

E_2 = Tawaran mereka ditolak

Judy percaya bahwa probabilitas tawarannya akan diterima adalah 0,8; dengan demikian, Judy akan menentukan P (E_1) = 0,8 dan P (E_2) = 0,2. Namun, Tom percaya bahwa kemungkinan

penawarannya yang akan diterima adalah 0,6; karenanya, Tom akan menetapkan P (E_1) = 0,6 dan P (E_2) = 0,4.
Baik Judy dan Tom memberikan probabilitas yang memenuhi dua persyaratan dasar. Itu memperlihatkan bahwa estimasi probabilitas mereka berbeda mencerminkan sifat pribadi dalam menentukan metode subjektif.

Dalam probabilitas ada istilah *Event* yang didefinisikan sebagai sekumpulan dari *sample point*. Probabilitas dari suatu *event* sama dengan jumlah probabilitas dari seluruh sample point dalam event tersebut. Jika seluruh sample points dari suatu eksperimen dapat diidentifikasi dan ditentukan probabilitasnya, maka probabilitas dari event dapat diperhitungkan.

Misalnya dalam percobaan melempar dadu, maka ruang sampel percobaan tersebut memiliki enam titik sampel dan dilambangkan S {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sekarang perhatikan kejadian yang menunjukkan jumlah titik atas dadu adalah angka genap. Tiga titik sampel dalam acara ini adalah 2, 4, dan 6. Menggunakan huruf A untuk menunjukkan acara ini, kami menulis A sebagai kumpulan titik sampel.

$$A\{2,4,6\}$$

Dari kasus tersebut kita dapat mencari berapa probabilitas dari angka genap yang muncul pada pelemparan dadu. Caranya kita dapat menjumlahkan probabilitas dari masing-masing titik samplenya seperti berikut:

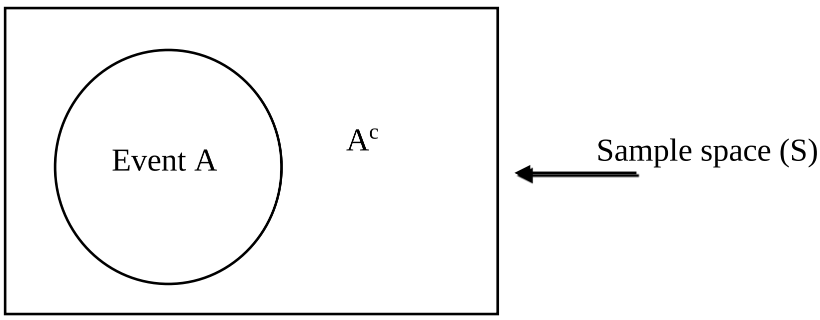
$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$$

$$P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = ½$$

1.3. Hubungan Probabilitas

Ada beberapa hubungan dasar probabilitas yang dapat digunakan untuk menghitung probabilitas event tanpa perlu mengetahui probabilitas dari sampel point, yaitu: Komplemen dari suatu event, Gabungan dua event, Irisan dua event, Event yang saling lepas (Mutually Exclusive).

a. Komplemen dari suatu event
   - Komplemen dari event *A* didefinisikan sebagai suatu event yang terdiri atas seluruh sampel point yang bukan bagian dari *A*.
   - Komplemen *A* dinotasikan sebagai A^c.
   - Diagram Venn berikut menggambarkan konsep komplemen.

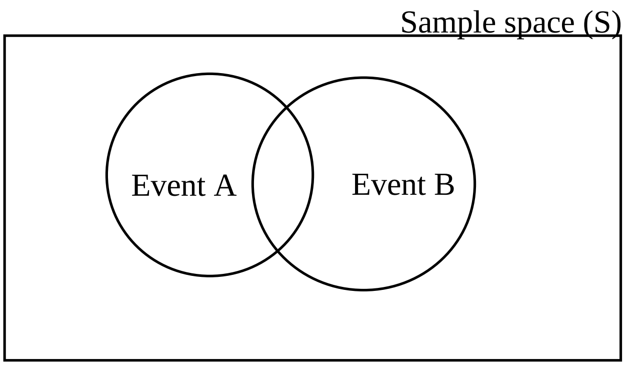


Gambat 1.1. Diagram Venn dengan konsep komplemen

- Perhitungan probabilitas komplemen :

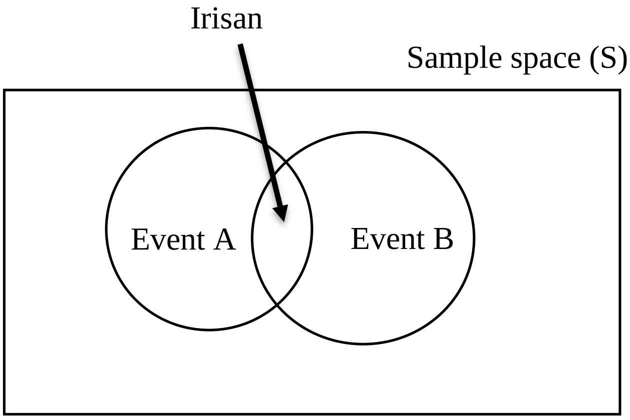
  $P(A) = 1 - P(A^c)$

b. Gabungan dua event
  - Gabungan event A dan B adalah suatu event yang terdiri atas seluruh sampel point yang merupakan bagian dari A atau B atau keduanya.
  - Gabungan tersebut dinotasikan sebagai $A \cup B$.
  - Gabungan A dan B digambarkan sebagai berikut:



Gambat 1.2. Gabungan *event* A dan *event* B

c. Irisan dua event
  - Irisan event A dan event B adalah kumpulan sample points yang merupakan bagian dari A dan B.
  - Irisan dinotasikan sebagai $A \cap B$.



Gambat 1.3. Irisan *event* A dan *event* B

  - Hukum penjumahan (addition law) memungkinkan perhitungan probabilitas terjadinya event A, atau B, atau keduanya.
  - Hukum penjumlahan dituliskan sebagai berikut:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Contoh 1

Pada suatu evaluasi hasil kerja bulanan terhadap 50 orang pekerja, seorang manajer mendapatkan informasi bahwa 5 orang pekerjanya tidak menyelesaikan pekerjaan dengan tepat waktu, 6 orang menghasilkan produk gagal, dan 2 orang tidak tepat waktu dan menghasilkan produk gagal. Berapakah probabilita menemukan pekerja tidak bermasalah?

Jawaban

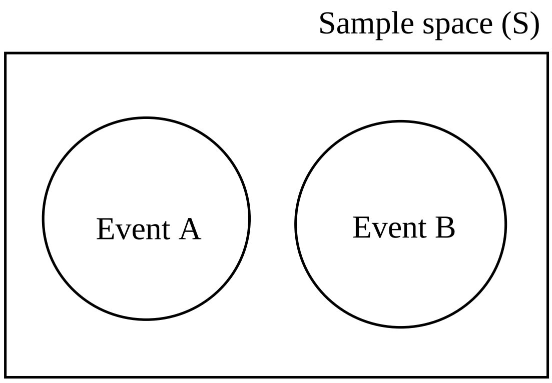
Misalkan

A = Pekerjaan tidak tepat waktu

B = Terjadinya produk gagal

P(A)	= 5/50 = 0,1
P(B)	= 6/50 = 0,12
P(A∩B)	= 2/50 = 0,04
$P(A \cup B)$	= P(A) + P(B) - P(A∩B)
	= 0,1 + 0,12 – 0,04
	= 0,18
$P(A \cup B)^c$	= 0,82

a. Event yang saling lepas (Mutually Exclusive)
   - Dua events dikatakan mutually exclusive jika tidak terdapat sample point yang merupakan bagian dari keduanya.



Gambat 1.4. Mutually Exclusive *event* A dan *event* B

   - Hukum penjumlahan pada Mutually Exclusive Events

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b. Probabilitas Kondisional
   - Probabilitas event dengan syarat tertentu atau pada kondisi suatu event lain terjadi disebut conditional probability.
   - Probabilitas kondisional A dengan syarat B terjadi dinotasikan sebagai P(A|B).

- Perhitungan probabilitas kondisional dirumuskan sebagai:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Contoh 2

Pada tabel di bawah ini adalah data karyawan pria dan wanita yang naik pangkat dan yang tidak naik pangkat. Tampilan tabelnya adalah sebagai berikut:

Tabel 1.3. Irisan jenis kelamin dengan pangkat

	Naik Pangkat (B)	Tidak Naik Pangkat (B^c)	Total
Pria (M)	288	672	960
Wanita (W)	36	204	240
Total	324	876	1200

Dari tabel tersebut, hitunglah:

a. Probabilitas dari masing-masing irisan!

b. Probabilitas kondisional dari masing-masing irisan!

Jawaban

a. Untuk menghitung probabilitas dari masing-masing irisan adalah sebagai berikut:

$$P(M \cap B) = \frac{288}{1200} = 0{,}24$$

$$P(M \cap B^c) = \frac{672}{1200} = 0{,}56$$

$$P(W \cap B) = \frac{36}{1200} = 0{,}03$$

$$P(W \cap B^c) = \frac{204}{1200} = 0{,}17$$

$$P(B) = \frac{324}{1200} = 0{,}27$$

$$P(B^c) = \frac{876}{1200} = 0{,}73$$

$$P(M) = \frac{960}{1200} = 0{,}8$$

$$P(W) = \frac{240}{1200} = 0{,}2$$

Tabel hasil perhitungan probabilitasnya adalah sebagai berikut:

Tabel 1.4. Probabilitas irisan jenis kelamin dengan pangkat

	Naik Pangkat (B)	Tidak Naik Pangkat (B^c)	Total
Pria (M)	0,24	0,56	0,80
Wanita (W)	0,03	0,17	0,20
Total	0,27	0,73	1,00

b. Dari tabel tersebut, kita dapat mencari probabilitas kondisional dari masing-masing irisan adalah sebagai berikut:

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0.24}{0,80} = 0,30$$

$$P(B|W) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{0.03}{0,20} = 0,15$$

$$P(B^c|M) = \frac{P(B^c \cap M)}{P(M)} = \frac{0.56}{0,80} = 0,7$$

$$P(B^c|W) = \frac{P(B^c \cap W)}{P(W)} = \frac{0.17}{0,20} = 0,85$$

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{0,27} = 0,89$$

$$P(W|B) = \frac{P(W \cap B)}{P(B)} = \frac{0.03}{0,27} = 0,11$$

$$P(M|B^c) = \frac{P(M \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.56}{0,73} = 0,77$$

$$P(W|B^c) = \frac{P(W \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.17}{0,73} = 0,23$$

d. Hukum Perkalian

- Hukum perkalian (*multiplication law*) memungkinkan perhitungan probabilitas irisan dari dua event.
- Rumusnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

- Pada event independent maka apabila event A dan B independent maka P(A|B) = P(A), berdasarkan kondisi tersebut hukum perkalian untuk event yang independent dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Dengan rumus di atas kita dapat menguji apakah dari dua event itu beririsan atau saling berlepasan (independen).

Contoh 3

Dari contoh 2 di atas kita akan menguji apakah event naik pangkat dan pria dapat dikatakan independen?

Jawaban

Untuk menguji kasus tersebut kita dapat melakukan dengan 2 cara yaitu:

1. Cek apakah : $P(M|B) = P(M)$

   $0{,}89 \neq 0{,}80$

2. Cek dengan hukum perkalian

$$P(M \cap B) = P(M)P(B)$$

$$0{,}24 = (0{,}80)\ (0{,}27)$$

$$0{,}24 \neq 0{,}216$$

Kesimpulannya event naik pangkat dan pria adalah tidak independen

1.4. Studi Kasus Probabilitas

1. Misalkan sampel space memiliki lima elemen hasil eksperimen yang kemungkinan besar sama. Elemennya dapat dilihat seperti berikut: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5.
   Ada 3 grup yaitu A, B, dan C dengan anggota seperti berikut:

   $A = \{ E_1, E_2 \}$
   $B = \{ E_3, E_4 \}$
   $C = \{ E_2, E_3, E_5 \}$

   <u>Tugas</u>

   Berdasarkan studi kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!

   a. Carilah Probabilitas P(A), P(B) dan P(C) ?
   b. Carilah Probabilitas $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup C)$ dan $P(A \cap C)$?
   c. Carilah item A^c, B^c, C^c dan Probabilitas $P(A^c)$, $P(B^c)$ dan $P(C^c)$?
   d. Carilah Probabilitas $P(A \cup B^c)$, $P(A \cap B^c)$, $P(A \cup C^c)$ dan $P(A \cap C^c)$?

2. Sebuah survei siswa MBA memperoleh data berikut tentang "Alasan pertama siswa untuk menggunakan aplikasi sekolah pada kegiatan matrikuliasi. Datanya dapat dilihat seperti berikut:

Tabel 1.5. Irisan aplikasi dengan kualitas

	Kualitas (Q)	Confidence (C)	Other (O)	Total
Full Time (F)	421	393	76	890
Part Time (P)	400	593	46	1039
Total	821	986	122	1929

<u>Tugas</u>

Berdasarkan kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!

a. Buatlah tabel probabilitas irisan pada masing-masing alasan di atas!
b. Buatlah probablitas kondisionalnya pada masing-masing alasannya!
c. Apakah Full Time beririsan dengan Confidence!
d. Apakah Part Time beririsan dengan Kualitas!

Modul Kuliah ke 2
TPK

Probabilitas dan Distribusi Probabilitas

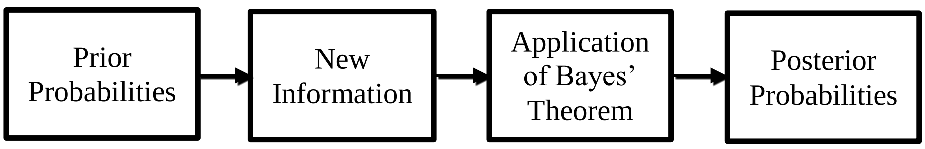
Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami hukum bayes.
2. Memahami distribusi probabilitas diskrit dan metode Binomial.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus.

2.1. Teorema Bayes

Seringkali analisis probabilitas dimulai dengan adanya probabilita awal (*Prior Probabilties*). Kemudian dari sampel, laporan khusus, atau *product test* didapatkan sejumlah informasi tambahan yang baru. Berdasarkan informasi tambahan tersebut, dapat dihitung probabilitas akhir (*posterior probabilities*) menggunakan teorema bayes.

Teorema Bayes merupakan suatu metode untuk menghitung probabilitas akhir. Langkah-langkah dalam menggunakan teorema bayes dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1. Langkah teorema bayes

Teorema Bayes berlaku ketika peristiwa yang ingin kita hitung posterior probabilitasnya saling eksklusif dan penyatuan mereka adalah seluruh sample space. Teorema Bayes dapat diperluas ke kasus n peristiwa yang saling eksklusif A_1, A_2, ..., A_n, dimana gabungan dari seluruh sample space. Dalam kasus seperti itu, teorema Bayes dapat digunakan untuk menghitung probabilitas posterior P (Ai|B).

Untuk menghitung *posterior probability* terjadinya event A_i ketika terjadi event B dapat diterapkan dengan rumus Teorema Bayes seperti berukut:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Gambar 2.2. Rumus teorema bayes

Teorema Bayes dapat diterapkan apabila event-event yang akan diperhitungkan posterior probabilitiesnya adalah *mutually exclusive* dan gabungannya adalah keseluruhan sample space.

Probabilitas bahwa yang terpilih adalah A_i ketika dengan syarat B dihitung sebagai berikut :

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

Gambar 2.3. Rumus teorema bayes Ai dan B

Contoh 1

Pada pemilihan ketua senat pada suatu kampus terdapat dua kandidat yaitu A_1 dan A_2. Informasi awal probabilitas pada dua kandidat tersebut dapat terpilih menjadi ketua senat adalah sebagai berikut:

A_1 = kandidat pertama terpilih menjadi ketua senat

A_2 = kandidat kedua terpilih menjadi ketua senat

Prior Probabilities:

Diprediksikan $P(A_1) = 0.7$, $P(A_2) = 0.3$

New Information:

Diketahui pula bahwa masing-masing kandidat memiliki program yang berbeda sehingga berdampak pada perbedaan probabilitas didirikannya koperasi mahasiswa (B). Dimana probabilitas program koperasi mahasiswa dapat berdiri pada masing-masing kandidat adalah sebagai berikut:

$P(B|A_1) = 0.2$ $P(B|A_2) = 0.9$

Dari probabilitas tersebut kita dapat menentukan probabilitas program koperasi tidak dapat berdiri pada masing-masing kandidat adalah sebagai berikut:

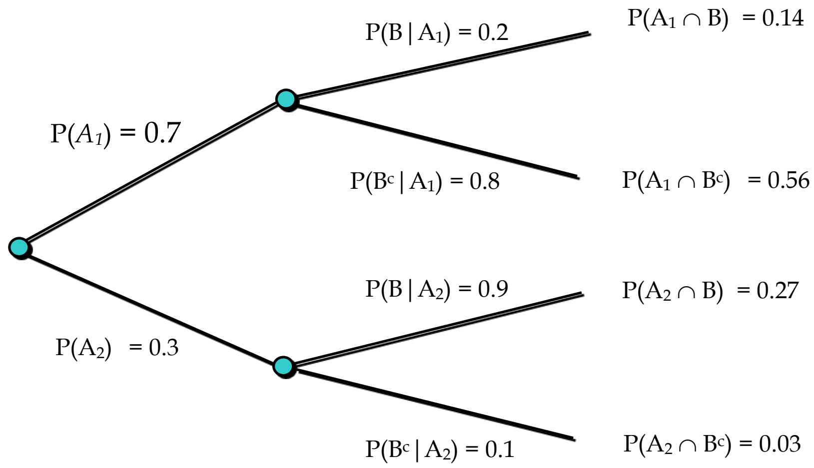
$P(B^c|A_1) = 0.8$ $P(B^c|A_2) = 0.1$

Dari kasus tersebut hitunglah probabilitas posteriornya!

Jawaban

Dari kasus di atas kita dapat menggunakan 2 cara yaitu:

a. Menggunakan Diagram pohon



Gambar 2.4. Diagram pohon

Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{(0,7)(0,2)}{(0,7)(0,2) + (0,3)(0,9)}$$

$$P(A_1|B) = 0,3415$$

Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{(0,3)(0,9)}{(0,7)(0,2) + (0,3)(0,9)}$$

$$P(A_1|B) = 0,6585$$

b. Pendekatan Tabular Teorema bayes

- Probabilitas koperasi dapat berdiri menggunakan teorema bayes adalah sebagi berikut:

Tabel 2.1. Probabilitas koperasi dapat berdiri

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Events (A_i)	Prior Probabilities $P(A_i)$	Conditional Probabilities $P(B\|A_i)$	Joint Probabilities $P(A_i \cap B)$	Posterior Probabilities $P(A_i\|B)$
A_1	0,7	0,2	0,14	0,3415
A_2	0,3	0,9	0,27	0,6585
	1		P(B) = 0,41	1

Dari tabel tersebut dapat kita lihat bahwa :

- Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,3415.
- Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,6585

- Kita dapat juga mencari probabilitas koperasi tidak dapat berdiri menggunakan teorema bayes adalah sebagi berikut:

Tabel 2.2. Probabilitas koperasi tidak dapat berdiri

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Events (A_i)	Prior Probabilities $P(A_i)$	Conditional Probabilities $P(B^c\|A_i)$	Joint Probabilities $P(A_i \cap B)$	Posterior Probabilities $P(A_i\|B)$
A_1	0,7	0,8	0,56	0,949
A_2	0,3	0,1	0,03	0,051
	1		P(B) = 0,59	1

- Dari tabel tersebut dapat kita lihat bahwa :
  - Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa tidak dapat berdiri dengan syarat kandidat A_1 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,949.
  - Probabilitas bahwa koperasi mahasiswa tidak dapat berdiri dengan syarat kandidat A_2 terpilih, maka probabilitasnya adalah 0,051

2.2. Distribusi Probabilitas Diskrit

Pada bahasan bagian ini akan melanjutkan materi mengenai probabilitas dengan konsep dari

variabel random dan distribusi probabilitas. Distribusi probabilitas dapat berupa variabel random diskrit dan kontinu. Distribusi probabilitas yang akan dibahas pada bagian ini yaitu mengenai binomial, Poisson, distribusi probabilitas yang seragam, distribusinormal, dan eksponensial.

1. Variabel Random

Variabel random adalah deskripsi numerik dari *outcome* suatu eksperimen. Variabel random dapat diklasifikasikan menjadi diskrit (*discrete*) atau kontinu (*continuous*) bergantung pada nilai numerik yang diasumsikan. Variabel random diskrit (*Discrete random variable*) dapat berupa nilai-nilai dengan jumlah tertentu atau urutan nilai tak terbatas. Variabel random kontinu (*Continuous random variable*) dapat berupa sembarang nilai numerik pada suatu interval atau kumpulan interval

Contoh 1:

- Variabel random diskrit dengan nilai tertentu
  Misal *x* = jumlah mahasiswa kelas A yang tidak hadir, dengan x yang mungkin (0, 1, 2, 3, ……, 30)
- Variabel random diskrit dengan nilai berupa urutan tak terbatas
  Misal x = jumlah telfon yang masuk ke panitia penerimaan mahasiswa baru IBS pada suatu hari tertentu, dengan x yang mungkin adalah 0, 1, 2, . . .
- Variabel random kontinu
  Misal x = jeda waktu antar kedatangan nasabah pada suatu atm, dengan x yang mungkin adalah $x \geq 0$

2. Distribusi Probabilitas Diskrit

Distribusi probabilitas pada variabel random menggambarkan bagaimana probabilita terdistribusi pada nilai-nilai random variabel.

Distribusi probabilitas didefinisikan dengan fungsi probabilitas, dinotasikan sebagai f(x), yang menentukan besarnya probabilitas untuk setiap variabel random.

Syarat fungsi probabilitas diskrit :

$$f(x) \geq 0$$

$$\Sigma f(x) = 1$$

Distribusi probabilitas diskrit dapat digambarkan dengan tabel, grafik atau persamaan

Expected value atau mean, dari variabel random merupakan ukuran nilai sentralnya.

Untuk menghitung expected value variabel random diskrit dapat dilakukan dengan rumus:

$$E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$$

Variance menggambarkan variasi nilai-nilai random variabel.

Untuk menghitung variance variabel random diskrit dapat dilakukan dengan rumus:

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot f(x)$$

Contoh 2:
Suatu perusahaan penjualan mobil sedang mengamati data jumlah mobil yang terjual kepada pelanggan tiap harinya selama 300 hari terakhir. Berdasarkan data tersebut dapat dihitung probabilitas jumlah mobil yang terjual pada suatu hari melalui metode frekuensi relatif.

Tabel 2.3. Penjualan mobil per hari

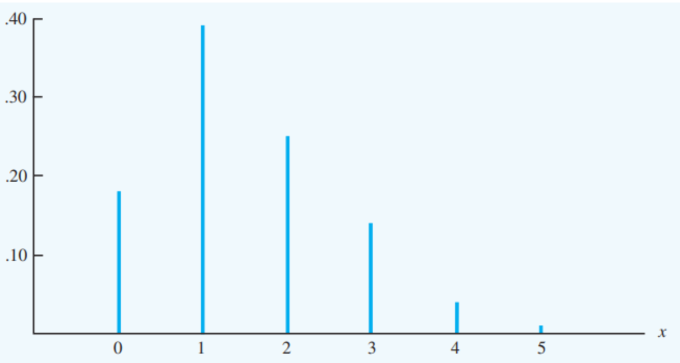
Jumlah Mobil Terjual (x)	Jumlah Hari (f)
0	54
1	117
2	72
3	42
4	12
5	3
Jumlah	300

Dari kasus tersebut hitunglah
a. Berapa Probabilitas penjualan mobil tersebut?
b. Berapa expexted value, variance dan standar deviasinya?

Jawaban
a. Kita dapat menghitung probabilitas penjualan mobil dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2.4. Probabilitas penjualan mobil per hari

Jumlah Mobil Terjual (x)	Jumlah Hari (f)	Probabiltas f(x)
0	54	54/300 = 0,18
1	117	117/300 = 0,39
2	72	72/300 = 0,24
3	42	42/300 = 0,14
4	12	12/300 = 0,04
5	3	3/300 = 0,01
Jumlah	300	1



Gambar 2.5. Probabilitas penjualan mobil

b. Untuk menghitung expexted value, variance dan standar deviasinya adalah sebagai berikut:
Rumus *expexted value* : $E(x) = \mu = \Sigma x f(x)$

Tabel 2.5. Penghitungan expexted value

(x)	f(x)	xf(x)
0	0,18	0
1	0,39	0,39
2	0,24	0,48
3	0,14	0,42
4	0,04	0,16
5	0,01	0,05
Jumlah	1	E(x) = 1,50

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa *expexted value* penjualan mobil adalah 1,5 unit.
Rumus variance *:* $\text{Var}(x) = \sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot f(x)$

Tabel 2.6. Penghitungan variance

(x)	x - μ	(x - μ)^2	f(x)	(x - μ)^2 f(x)
0	0-1,5= -1,5	2,25	0,18	0,4050
1	1-1,5=-0,5	0,25	0,39	0,0975
2	2-1,5=0,5	0,25	0,24	0,0600
3	3-1,5=1,5	2,25	0,14	0,3150
4	4-1,5=2,5	6,25	0,04	0,2500
5	5-1,5=3,5	12,25	0,01	0,1225
				σ^2=1,2500

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa variance penjualan mobil adalah 1,25 unit

Untuk mencari standar deviasi dapat kita lakukan dengan menghitung akar dari variance di atas seperti berikut:

$$\delta = \sqrt{\delta^2}$$

$$\delta = \sqrt{1{,}25}$$

$$\delta = 1{,}118$$

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa standar deviasi penjualan mobil adalah 1,118 unit

2.3. Distribusi Probabilitas Binomial

Karakteristik pada eksperimen Binomial adalah sebagai berikut:

- Eksperimen merupakan rangkaian *n* percobaan yang identik.
- Hanya ada dua outcomes yaitu sukses dan gagal yang mungkin terjadi pada setiap percobaan.
- Probabilitas sukses, dinotasikan dengan *p*, tidak berubah dari percobaan satu ke percobaan lainnya.
- Masing-masing percobaan adalah independent

Fungsi Probabilitas Binomial rumusnya adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

Dimana :

$f(x)$ = probabilitas x sukses dari n percobaan

n = banyaknya percobaan

p = probabilita sukses dari satu percobaan

x = jumlah yang sukses pada n percobaan

Untuk mencari Expected Value pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$E(x) = \mu = np$$

Untuk mencari Variance pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$Var(x) = \sigma^2 = np(1 - p)$$

Untuk mencari standar deviasi pada probabilitas binomial adalah sebagai berikut:

$$SD(x) = \sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

Contoh 3
Suatu toko pakaian sedang mengkaji pelanggan yang akan melakukan pembelian kepada para pelanggan yang memasuki tokonya. Berdasarkan data periode-periode sebelumnya disimpulkan bahwa pelanggan yang datang akan melakukan pembelian adalah 30%.

Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Jika dipilih 3 pelanggan secara random berapa probabilitas bahwa 2 dari 3 pelanggan tersebut akan melakukan pembelian pada saat mendatangi toko?
b. Berapa variance dan standar deviasinya?

Jawaban

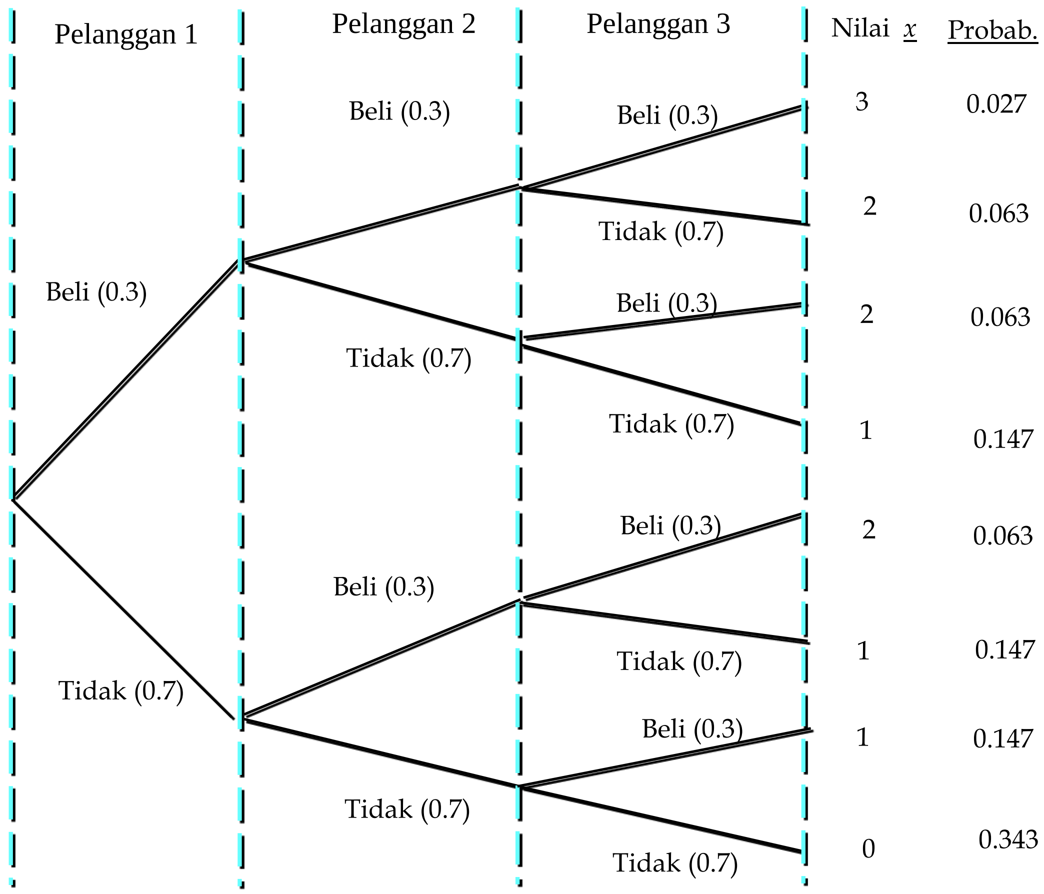
Diketahui :

p = 0,3
n = 3
x = 2

Ditanyakan p(2) = ?

a. Untuk mencari berapa probabilitas 2 dari 3 pelanggan yang akan melakukan pembelian, kita dapat menggunakan dengan beberapa cara yaitu:

1) Menggunakan pohon diagram



Gambar 2.6. Diagram pohon

Dari gambar di atas terlihat bahwa jumlah pelanggan 2 orang dari 3 orang yang akan membeli adalah : 0,063 + 0,063 + 0,063 = 0,189

2) Menggunakan Rumus probabilitas binomial

$$f(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$f(2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} 0{,}3^2 (1-0{,}3)^{(3-2)}$$

$$f(2) = 0{,}189$$

3) Menggunakan tabel probabilitas binomial

		p					
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270

Gambar 2.7. Tabel probabilitas binomial

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa dengan n = 3, p = 0,3, maka:
x = 2 nilai probabilitasnya adalah 0,1890

b. Untuk mencari expexted value, variance dan standar deviasi adalah sebagai berikut:
   1. Untuk mencari Expected Value adalah sebagai berikut:

      $E(x) = \mu = np$

      $E(x) = \mu = (3)(0,3)$

      $E(x) = \mu = 0,9$

   2. Untuk mencari Variance adalah sebagai berikut:

      $Var(x) = \sigma^2 = np(1 - p)$

      $Var(x) = \sigma^2 = (3)(0,3)(1 - 0,3)$

      $Var(x) = \sigma^2 = (3)(0,3)(0,7)$

      $Var(x) = \sigma^2 = 0,63$

   3. *Untuk mencari standar deviasi adalah:*

      $SD(x) = \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0,63} = 0,79$

2.4. Studi Kasus Distribusi Probabilitas

1. Pada pemilihan ketua RT pada suatu daerah terdapat tiga calon kandidat yaitu A_1, A_2 dan A3. Informasi awal probabilitas pada tiga calon kandidat tersebut dapat terpilih menjadi ketua RT adalah sebagai berikut:

   A_1 = kandidat pertama terpilih menjadi ketua RT
   A_2 = kandidat kedua terpilih menjadi ketua RT
   A_3 = kandidat ketiga terpilih menjadi ketua RT

   Prior Probabilities:

   P(A_1) = 0,5
   P(A_2) = 0.2
   P(A_3) = 0.3

   New Information:

   Diketahui pula bahwa masing-masing calon memiliki program yang berbeda sehingga berdampak pada perbedaan probabilitas didirikannya bisnis RT (B). Dimana probabilitas program bisnis RT dapat berdiri pada masing-masing calon adalah sebagai berikut:

   $P(B|A_1) = 0.2$
   $P(B|A_2) = 0.2$
   $P(B|A_3) = 0.3$

   Tugas
   Dari kasus tersebut hitunglah
   a. Berapa probabilitas bisnis RT tersebut dapat berdiri oleh A_1, A_2 dan A_3?
   b. Berapa probabilitas bisnis RT tersebut tidak dapat berdiri oleh A_1, A_2 dan A_3?

2. Suatu Toko Olah raga mengamati data jumlah produk yang terjual kepada pelanggan tiap harinya selama 200 hari terakhir. Berdasarkan data tersebut dapat dihitung probabilitas jumlah produk yang terjual pada suatu hari melalui metode frekuensi relatif

   Tabel 2.7. Data penjualan mobil

Jumlah Mobil Terjual (x)	Jumlah Hari (f)
0	8
1	68
2	82
3	36
4	6
Jumlah	200

   Tugas
   Dari kasus tersebut hitunglah
   a. Berapa Probabilitas penjualan mobil tersebut?
   b. Berapa expexted value, variance dan standar deviasinya?

3. Suatu toko baju sedang mengkaji pelanggan yang akan melakukan pembelian kepada para pelanggan yang memasuki tokonya. Berdasarkan data periode-periode sebelumnya disimpulkan bahwa pelanggan yang datang akan melakukan pembelian adalah 25%.

   Jika dipilih 3 pelanggan secara random untuk mencari seberapa besar probabilitas pelanggan toko tersebut dapat membeli produknya.

   Tugas

   Berdasarkan studi kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!

   a. Carilah Probabilitas satu dari 3 orang dapat membeli ?
   b. Carilah Probabilitas 2 dari 3 orang dapat membeli?
   c. Berapa paling banyak 2 orang akan membeli?
   d. Berapa Expected Value toko tersebut?
   e. Berapa Varian dan standar deviasinya?

Modul Kuliah ke 3
TPK

Distribusi Probabilitas Poisson dan Distribusi Normal

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami distribusi probabilitas Poisson.
2. Memahami distribusi probabilitas seragam, distribusi normal.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus tertentu.

3.1. Distribusi Probabilitas *Poisson*

Karakteristik eksperimen Poisson adalah sebagai berikut:

- Probabilitas terjadinya sesuatu sama untuk dua interval sembarang dengan panjang yang sama.
- Terjadi atau tidak terjadinya sesuatu pada sembarang interval independen terhadap sembarang interval yang lain.

Rumus Fungsi probabilitas Poisson adalah sebagi berikut:

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana :

x = jumlah kejadian pada suatu interval (0,1,2,…   )

λ = mean kejadian pada suatu interval

e = 2,71828

Pada persamaan tersebut tidak menunjukkan batas atas jumlah nilai yang mungkin dapat terjadi pada variabel random Poisson. Variabel x adalah variabel random diskrit dengan urutan nilai yang tak terbatas (x = 0, 1, 2, ...), maka variabel random Poisson tidak memiliki batas atas yang ditetapkan.

Contoh 1

Jumlah mobil yang datang pada suatu layanan drive thru sebuah restoran siap saji adalah 6 mobil per jam. Berapa probabilitas dalam 30 menit ada 4 mobil yang datang untuk membeli makanan pada restoran tersebut?

Jawaban

Diketahui

Rata-rata jumlah mobil yang datang = 6 mobil   dalam 60 menit

λ = dalam 30 menit = 3 mobil

x = 4

Untuk menghitung probabilitas poisson dapat menggunakan dua cara yaitu:

a. Menggunakan rumus fungsi poisson
Maka probabilitas ada 4 mobil yang membeli dalam 30 menit adalah :

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$f(4) = \frac{3^4 2{,}71828^{-3}}{4!} = 0{,}1680$$

Jadi probabilitas ada 4 mobil yang membeli adalah 0,1680.

b. Menggunakan tabel probabilitas poisson

Tabel 3.1 Probabilitas poisson

	λ									
x	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**3.0**
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	$\boxed{0.1680}$

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai probabilitas untuk x = 4 dan λ = 3 adalah 0,1680

3.2. Distribusi Probabilitas Kontinyu Seragam

Variabel random kontinyu merupakan sembarang nilai dalam suatu interval atau dalam sekelompok interval. Suatu hal yang mustahil untuk membahas probabilita suatu nilai tertentu dari variabel random kontinyu. Namun demikian kita dapat membahas probabilita variabel random yang diasumsikan sebagai sebuah nilai dalam suatu interval tertentu.

Probabilita suatu nilai variabel random dalam interval x_1 sampai x_2 didefinisikan sebagai daerah di bawah grafik fungsi kepadatan probabilita (*probability density function*) antara x_1 dan x_2

Variabel random terdistribusi secara seragam manakala probabilitanya proporsional terhadap panjang interval

Rumus untuk mencari fungsi kepadatan probabilitas (*Uniform Probability Density Function*) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = 1/(b - a) \quad \text{untuk } a \leq x \leq b$$
$$= 0 \quad \text{untuk lainnya}$$

Dimana :

a = nilai terkecil yang dapat diasumsikan dari variabel

b = nilai terbesar yang dapat diasumsikan dari variabel

Untuk mencari Expected Value dari x adalah sebagai berikut:

$$E(x) = (a + b)/2$$

Untuk mencari Variance dari x adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{Var}(x) = (b - a)^2/12$$

Contoh 2:

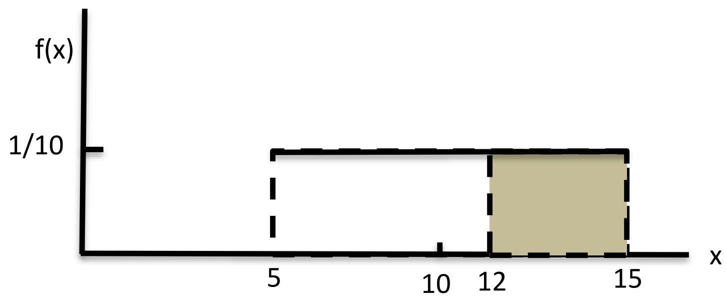
Pada sebuah restoran Shabu Hachi menetapkan biaya tertentu kepada para pelanggannya dalam mengambil salad. Berdasarkan sampel diketahui bahwa jumlah salad yang diambil terdistribusi secara seragam antara 5 sampai 15 ons

Dari kasus tersebut yang ditanyakan adalah:

a. Berapa probabilita seorang pelanggan akan mengambil salad antara 12 dan 15 ons?
b. Berapa expected value kasus tersebut?
c. Berapa variancenya?

Jawaban

a. Kita dapat menghitung fungsi kepadatan probabilitasnya adalah sebagai berikut:
   $f(x) = 1/(b - a)$ untuk $a \leq x \leq b$
   $f(x) = 1/(15 - 5)$ untuk $5 \leq x \leq 15$
   $f(x) = 1/10$



Gambar 3.1. Grafik seragam

Probabilitas = $P(12 \leq x \leq 15) = 1/10(3) = 0{,}3$

b. Untuk menghitung expexted value adalah sebagai berikut:

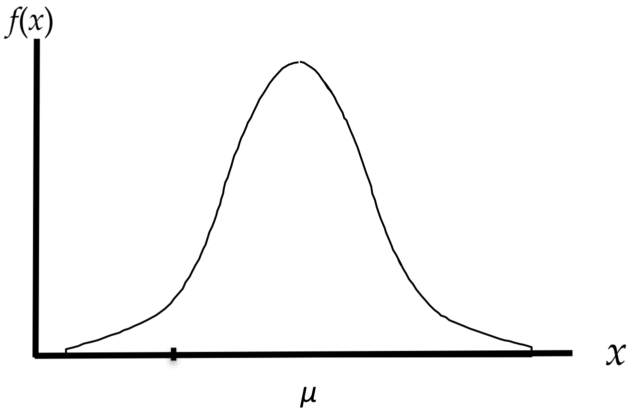
$$\begin{aligned} E(x) &= (a + b)/2 \\ &= (5 + 15)/2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

c. Untuk menghitung variance adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Var}(x) &= (b - a)^2/12 \\ &= (15 - 5)^2/12 \\ &= 8.33\end{aligned}$$

3.3. Distribusi Probabilitas Normal

Distribusi probabilitas yang dapat digunakan untuk menggambarkan variabel random kontinu adalah distribusi probabilitas normal. Distribusi probabilitas normal biasanya banyak digunakan dalam masalah situasi praktis, dan fungsi kerapatan probabilitasnya berbentuk kurva lonceng yang dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:



Gambar 3.2. Grafik seragam

Rumus untuk mencari fungsi kerapatan probability normal adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \text{untuk } -\infty < x < \infty$$

Dimana:

μ = mean atau expexted value dari variabel random x

σ = standar deviasi

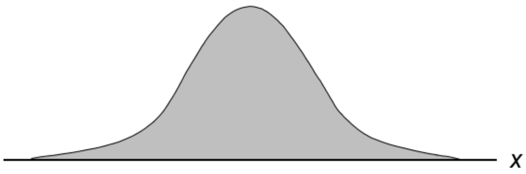
σ^2 = varian

π = 3.14159

e = 2.71828

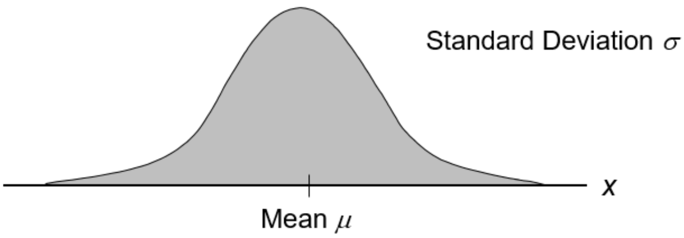
Karakteristik Distribusi Probabilita Normal adalah:

- Bentuk kurva normal seringkali digambarkan sebagai kurva berbentuk lonceng (bell-shaped curve).



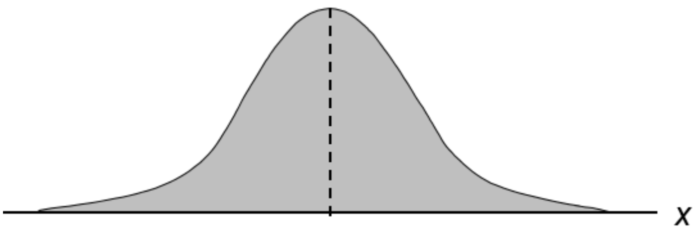
Gambar 3.3.. Grafik disribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Dua Parameter, *m* (mean) and σ (standard deviation), menentukan sentral dan bentuk distribusi.



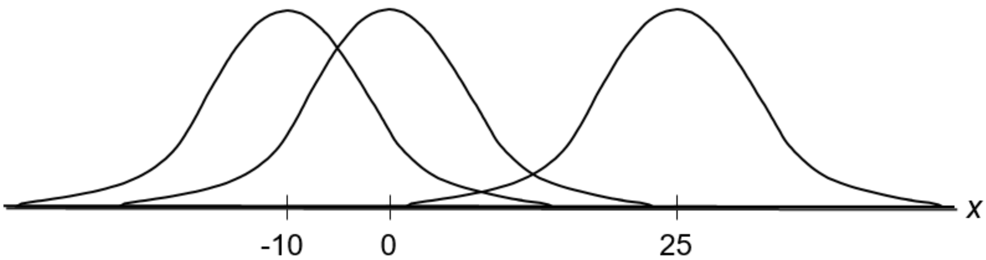
Gambar 3.4. Grafik disribusi probabilitas normal dengan sumbu x dan mean μ

- Titik tertinggi dari kurva normal berada pada meannya yang juga merupakan median dan modus.



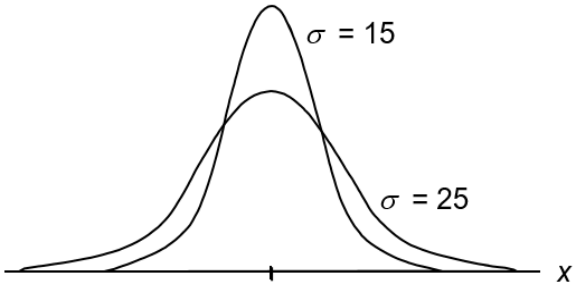
Gambar 3.5. Grafik disribusi probabilitas normal dengan median dan modus

- Mean dapat berupa sembarang nilai numerik: negatif, nol, atau positif



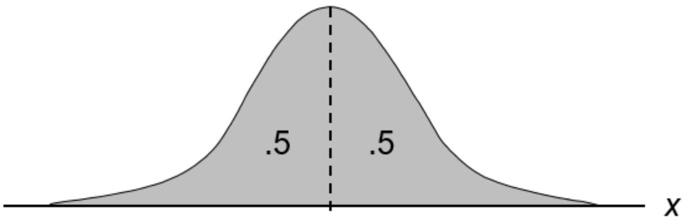
Gambar 3.6. Grafik persebaran disribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Kurva normal adalah simetris.
- Standar deviasi mementukan lebar kurva: semakin besar nilainya kurva semakin lebar dan mendatar.



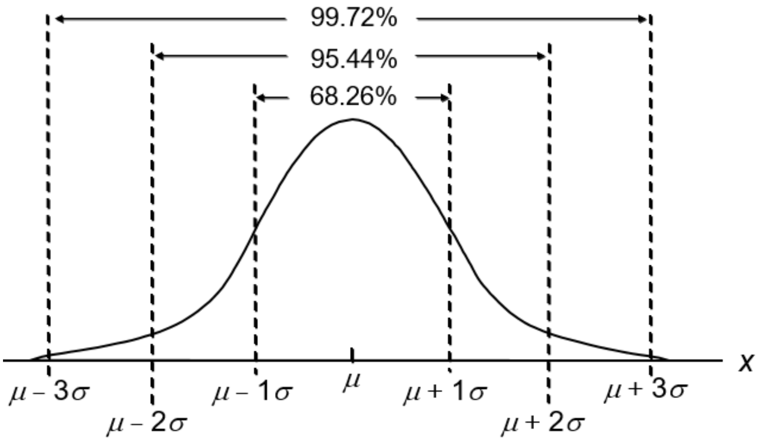
Gambar 3.7. Grafik disribusi probabilitas normal dengan ketinggian yang berbeda

- Luas total daerah di bawah kurva adalah 1 (0.5 di sebelah kiri mean dan 0.5 di sebelah kanan).



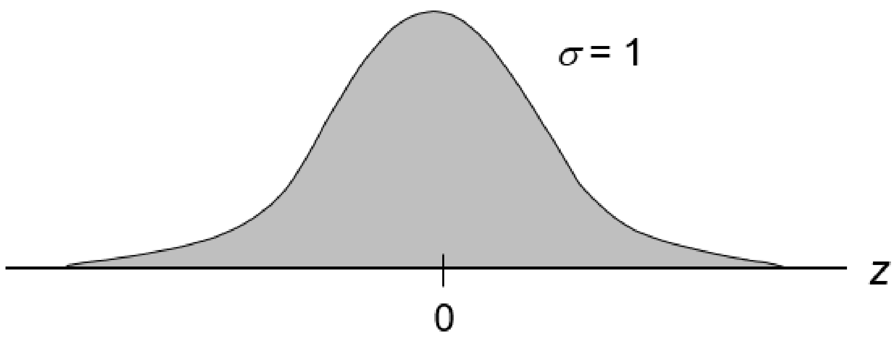
Gambar 3.8. Grafik disribusi probabilitas normal dengan luas area yang sama

- Probabilita variabel random normal ditunjukkan oleh daerah di bawah kurva
- Persentasi (%) nilai dalam beberapa interval yang biasa digunakan
  - **68.26%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 1 standard deviation** dari meannya.
  - **95.44%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 2 standard deviations** dari meannya.
  - **99.72%** nilai variabel random normal berada dalam **+/- 3 standard deviations** dari meannya.



Gambar 3.9. Grafik standar disribusi probabilitas normal dengan sumbu x

- Variabel random yang berdistribusi normal dengan mean sama dengan nol dan standar deviasi satu dikatakan memiliki Distribusi Probabilita Normal standar.
- Huruf z biasa digunakan untuk melambangkan variabel random normal ini
- Huruf z (z score) digunakan untuk menunjuk variabel random normal standar maksudnya z score ini merupakan nilai variabel random seberapa kalinya dari standar deviasi.



Gambar 3.10. Grafik disribusi probabilitas normal dengan sumbu z

Untuk mengkonversi ke dalam Distribusi Probabilita Normal Standar dengan rumusnya adalah sebagai berikut:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Dimana:

z = nilai dari z score sebagai ukuran berapa standar deviasi *x* dari μ

x = titik batas jarak dari μ

μ = mean

σ = stadar deviasi

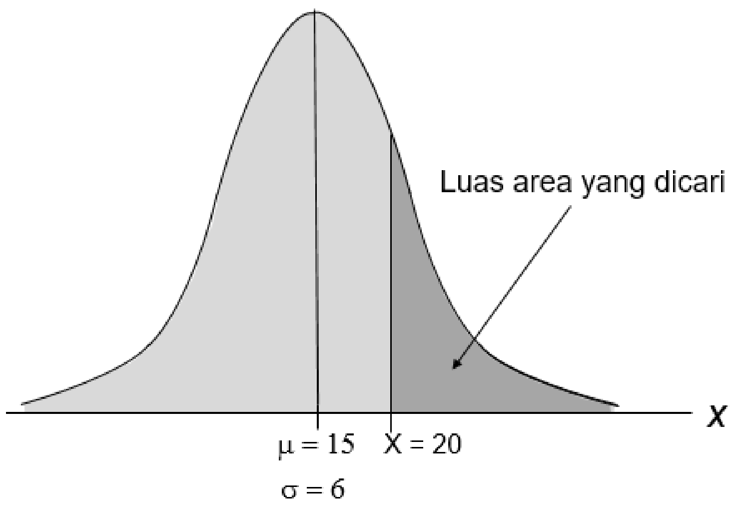
Contoh 3

Toko Pep Zone menjual oli kendaraan bermotor. Ketika stok oli berada di bawah 20 gallon, dilakukan pemesanan ulang stok.

Manajer Toko tidak menginginkan kehilangan peluang penjualan akibat kehabisan stok selama menunggu kiriman barang. Dari data penjualan diketahui bahwa jumlah permintaan selama waktu pengisian kembali stok terdistribusi normal dengan mean 15 gallon dan standar deviasi 6 gallon.

Manajer tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya stockout, P(x > 20)

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11. Grafik contoh kasus 2 disribusi probabilitas normal

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan x ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$z = (x - \mu)/\sigma$$
$$= (20 - 15)/6$$
$$= 0.83$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal komulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri z = 0.83

Tabel 3.2. Distribusi normal komulatif

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

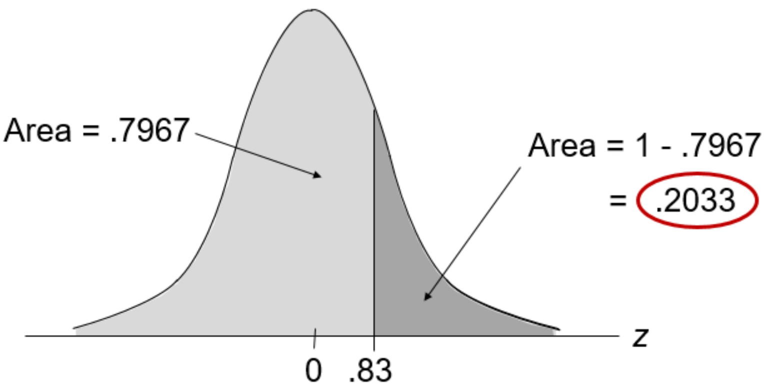
$P(z \leq .83) = .7967$

- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu 0,83, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,7967. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kanan.

- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kanan adalah sebagai berikut:

$$P(z > .83) = 1 - P(z \leq .83)$$
$$= 1 - .7967$$
$$= .2033$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 3.12. Grafik contoh kasus 2 disribusi probabilitas normal sumbu z

Tabel distribusi normal komulatif terdiri dari 2 bagian yaitu tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) dan tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) dengan penjelasa seperti berikut:

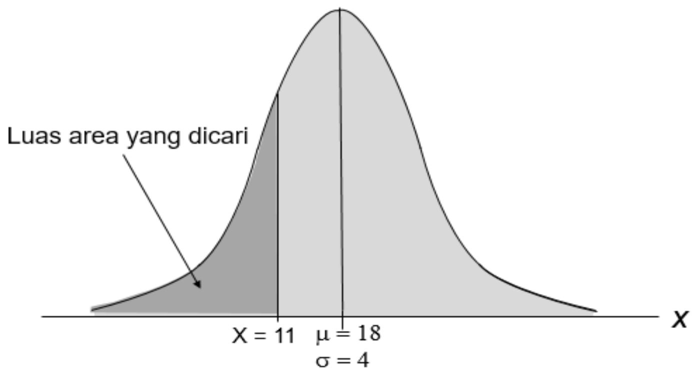
3. Tabel distribusi normal dengan nilai z score positif (+) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya positif (+) artinya titik dari x berada dibeselah kanan dari mean nya. Luas area sebelah kanan sama dengan 1 dikurangi dengan nilai yang didapat pada tabel.
4. Tabel distribusi normal dengan nilai z score negatif (-) untuk mencari luas area yang nilai z scorenya negatif (-) artinya titik dari x berada dibeselah kiri dari mean nya. Luas area sebelah kiri sama dengan nilai yang didapat pada tabel.

Contoh 4

Seorang pedagang dapat menjual baju dengan rata-rata 18 potong setiap minggunya dengan standar deviasi 4 potong. Berapa probabilitasnya pedagang tersebut dapat menjual bajunya lebih sedikit dari 11 potong?

Pedagang tersebut ingin mengetahui probabilitas terjadinya penjualan, P(x < 11)

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13. Grafik contoh kasus 3 disribusi probabilitas normal sumbu x

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Konversikan x ke distribusi normal standar seperti berikut:

$$z = (x - \mu)/\sigma$$
$$= (11 - 18)/4$$
$$= - 1.75$$

- Penentuan luas yang berada di bawah kurva normal dapat menggunakan tabel distribusi normal komulatif untuk memukan area di bawah kurva normal standar di sebelah kiri z = - 1.75

Tabel 3.3. Distribusi normal komulatif dengan Z negatif

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495

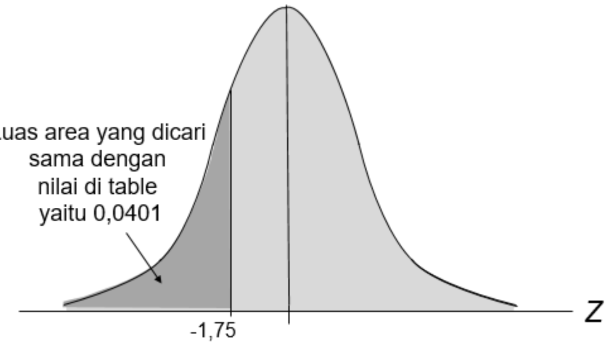
P(Z ≤ - 1,75) = 0,0401

- Pada Tabel di atas Kolom paling kiri menunjukkan sampai 1 angka di belakang koma dari nilai z score dan pada baris atas menunjukkan 2 angka dibelakang koma dari nilai z score. Setelah angka pada kolom kiri dan baris atas sesuai dengan nilai z score yaitu - 1,75, maka nilai hasil persinggungannya merupakan luas area dari kurva atau probabilitasnya dengan nilainya yaitu 0,0401. Nilai tersebut merupakan luas area dari titik x ke kiri, sedang yang ditanyakan adalah luas area atau probabilitas dari titik x ke sebelah kiri.

- Untuk menghitung luas area dari titik x ke sebelah kiri adalah sebagai berikut:

$$P(z \leq -1.75) = 0.0401$$

- Ilustrasinya dapat digambarkan seperti berikut:



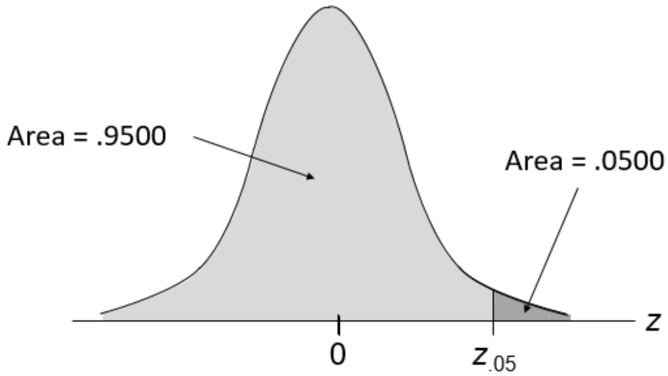
Gambar 3.14. Grafik contoh kasus 3 disribusi probabilitas normal sumbu z

Contoh 5

Dari contoh kasus 1 Jika manajer Pep Zone menginginkan probabilita kehabisan stiok tidak lebih dari 0.05, berapa seharusnya titik pemesanan kembali?

Manajer tersebut ingin mengetahui berapa jumlah gallon pemesanan kembali (X) dengan nilai probabilitasnya terjadinya stockout tidak lebih dari 0,05.

Kasus di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.15. Grafik contoh kasus 4 disribusi probabilitas normal sumbu z

Untuk menjawab kasus tersebut dapat dilakukan dengan langkah seperti berikut:

- Mencari Z score dengan area yang ada disebelah kiri dari titik $Z_{0,05}$ Menghitung besar nilai area sebelah kiri dapat dilihat seperti berikut:

- busi normal standar seperti berikut:

$$\text{Area kiri dari } Z_{0,05} = 1 - 0,05$$
$$= 0,9500$$

- Penentuan nilai Z score dapat dilihat pada tabel distribusi normal komulatif sebelah kanan, kemudian kita lihat dengan nilai area 0,95 berada dimana pada bagian nilai area di tabel seperti gambar berikut:

Tabel 3.4. Distribusi normal komulatif

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$Z_{(0,95)}$ = 1,645

- Pada tabel di atas dapat dilhat bahwa nilai Z score dengan area 0,95 pada tabel distribusi normal komulatif sebelah kanan, nilai Z = 1,645
- Setelah didapat nilai Z score nya, kemudian dapat dicari nilai x yang ditanyakan dengan menggunakan rumus Z seperti berikut:

$$z_{0.95} = (x - \mu)/\sigma$$

$$x = \mu + z_{0.95}\sigma$$

$$= 15 + 1.645(6)$$

$$= 24.87 \text{ atau dibulatkan } 25$$

Dengan demikian Pep Zone sebaiknya menentukan titik pengisian kembali pada 25 gallon untuk menjaga probabilita kehabisan stok sebesar 0.05

3.4. Studi Kasus Distribusi Probabilitas

1. Sebuah perusahaan yang bergerak dibidang jasa pelayanan menyediakan layanan pemesanan melalui telepon. Rata-rata Jumlah telepon yang masuk pada suatu kantor tersebut adalah 48 kali per jam.

   Dari kasus tersebut:
   a. Berapa probabilitas dari adanya 3 telepon yang masuk dalam interval 5 menit?
   b. Berapa probabilitas dari adanya 10 telepon yang masuk dalam interval 15 menit?
   c. Berapa probabilitas dari tidak ada telepon yang masuk dalam interval 5 menit?
   d. Berapa probabilitas dari adanya 9 telepon yang masuk dalam interval 30 menit?

2. Permintaan suatu produk baru pada suatu perusahaan produksi terestimasi secara distribusi normal dengan rata-rata permintaannya m = 200 unit dan standar deviasinya adalah 40 unit.

   Dari kasus tersebut :
   a. Berapa probabilitas dengan jumlah permintaan diatas 250 unit?
   b. Berpa probabilitas dengan jumlah permintaan dibawah 100 unit?
   c. Berapa probabilitas dengan jumlah permintaan antara 180 sampai 220 unit?
   d. Berapa probabilitas dengan jumlah permintaan antara 225 sampai 250 unit?
   e. Berapa unit minimal yang harus dipehuni dengan probabilitas tidak lebih dari 10%?
   f. Berapa unit maksimal yang harus dipehuni dengan probabilitas kekurangannya 5%?

Modul Kuliah ke 4

TPK

Analisis Pengambilan Keputusan

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami analisis pengambilan keputusan tanpa probabilitas.
2. Memahami analisis pengambilan keputusan dengan probabilitas.
3. Menentukan keputusan alternatif pilihan pada suatu kasus.

4.1. Pengambilan Keputusan Tanpa Probabilitas

Pada bagian ini mempertimbangkan pendekatan untuk pengambilan keputusan yang tidak membutuhkan pengetahuan dari kemungkinan kondisi reality. Pendekatan ini sesuai dalam situasi dimana pembuat keputusan memiliki sedikit kepercayaan pada kemampuannya untuk menilai probabilitas, atau di mana analisis kasus terbaik dan kasus terburuk sederhana yang diinginkan. Karena berbeda pendekatan kadang-kadang mengarah pada rekomendasi keputusan yang berbeda, pembuat keputusan harus memahami pendekatan yang tersedia dan kemudian memilih pendekatan yang spesifik menurut penilaian pembuat keputusan yang tepat. Dalam menentukan pengambilan keputusan tanpa probabilitas dapat menggunakan tiga pendekatan yaitu pendekatan optimistic, konservative dan Minimax Regret.

a. Pendekatan Optimistic

Pendekatan optimis mengevaluasi setiap alternatif keputusan dalam hal hasil terbaiknya dapat terjadi. Alternatif keputusan yang direkomendasikan adalah yang memberikan kemungkinan hasil yang terbaik. Pada pendekatan ini untuk memberikan solusi dari masalah di mana alternatif yang akan dipilih adalah yang memberikan keuntungan yang maksimum. Pada pendekatan optimis ini apabila pada perusahaan akan mengarahkan kepada pembuat keputusan untuk memilih alternatif yang sesuai dengan laba terbesar. Tetapi apabila kasusnya untuk alternatif pilihan seperti biaya, maka keputusannya yang terbaik adalah mengambil pilihan yang paling minimal atau terkecil.

Contoh 1

Misalkan PT. ABC berniat membangun suatu apartemen di daerah perumahan. Pihak manajemen memiliki tiga alternatif keputusan :

d_1 = membangun apartemen kecil yang terdiri atas 30 unit

d_2 = membangun apartemen menengah yang terdiri atas 60 unit

d_3 = membangun apartemen besar yang terdiri atas 90 unit

Berkaitan dengan rencana tersebut, kondisi demand akan apartemen tidak dapat dipastikan, sehingga didefinisikan ***states of nature*** :

s_1 = demand apartemen tinggi

s_2 = demand apartement rendah

Hasil dari tabel pada kondisi keuntungan (dalam juta) pada realnya ***states of nature*** adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1. State of Nature

Alternatif Pilihan	State of Nature	
	Strong Demand (s_1)	Weak Demand (s_2)
Small complex (d_1)	8	7
Medium complex (d_2)	14	5
Large complex (d_3)	20	-9

Dari tabel tersebut alternatif pilihan mana yang terbaik menggunakan pendekatan optimistic!

Jawaban

Pada pendekatan optimistic, kita dapat memilih alternatif pilihan yang tersedia dengan cara mencari pilihan yang paling besar keuntungannya atau yang paling maksimal.

Dari tabel di atas terlihat pada kondisi Strong Demand akan mendapatkan keuntungan yang paling besar seperti tabel berikut:

Tabel 4.2. Alternatif Pilihan

Alternatif Pilihan	State of Nature
	Strong Demand (s_1)
Small complex (d_1)	8
Medium complex (d_2)	14
Large complex (d_3)	**20**

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai yang terbesar labanya adalah dengan pilihan Large complex (d_3) dengan keuntungan sebesar 20 juta.

b. Pendekatan Konservatif

Pendekatan konservatif mengevaluasi setiap alternatif keputusan dalam hal hasil terburuk yang dapat terjadi. Alternatif keputusan yang direkomendasikan adalah yang memberikan yang terbaik dari kemungkinan pembayaran terburuk. Untuk masalah di mana ukuran output adalah laba, seperti dalam Masalah PDC, pendekatan konservatif akan mengarahkan pembuat keputusan untuk memilih alternatif yang memaksimalkan laba seminimal mungkin yang bisa diperoleh. Untuk masalah yang melibatkan minimisasi, pendekatan ini mengidentifikasi alternatif yang akan meminimalkan hasil maksimum.

Contoh 2

Pada kasus pada contoh 1 yaitu PT. ABC akan memilih alternatif dengan metode pendekatan konservatif. Alternatif pilihan mana yang akan diputuskan untuk dibangun dengan pendekatan konservatif tersebut?

Jawaban

Pada pendekatan konservatif, kita dapat memilih alternatif pilihan yang tersedia dengan cara mencari pilihan yang paling besar keuntungannya atau yang paling maksimal dari kondisi yang terburuk yaitu pada kondisi pasar sedang turun.

Keuntungan terbesar akan dipilih pada tabel dalam kondisi weak demand seperti tabel berikut:

Tabel 4.3. Alternatif Pilihan Weak Demand

Alternatif Pilihan	State of Nature
	Weak Demand (s_2)
Small complex (d_1)	**7**
Medium complex (d_2)	5
Large complex (d_3)	-9

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai yang terbesar labanya pada kondisi pasar sedang turun adalah dengan pilihan small complex (d_1) dengan keuntungan sebesar 7 juta

c. Pendekatan Minimax Regret

Pada pendekatan minimax regret dalam pengambilan keputusan akan memilih dari alternatif keputusan yang meminimalkan pada tingkat maksimum yang bisa terjadi atas semua keadaan reality. Pendekatan ini tidak sepenuhnya optimis atau murni konservatif. Langkah pada pendekatan ini adalah dengan cara:

1) Dari setiap data kondisi reality (setaip kolom), semua nilai dikurangi dengan nilai terbesar.
2) Dari setiap baris dipilih nilai yang terbesar, sehingga menjadi satu kolom pilihan.
3) Pada nilai yang telah ada kemudian dipilih nilai yang terkecil.

Contoh 3

Pada kasus pada contoh 1 yaitu PT. ABC akan memilih alternatif dengan metode pendekatan minimax regret. Alternatif pilihan mana yang akan diputuskan untuk dibangun dengan pendekatan minimax regret tersebut?

Jawaban

Pada pendekatan minimax regret, kita dapat memilih alternatif pilihan yang tersedia dengan cara :

Tabel 4.4. Alternatif Pilihan Minimax Regret

Alternatif Pilihan	State of Nature	
	Strong Demand (s_1)	Weak Demand (s_2)
Small complex (d_1)	8	7
Medium complex (d_2)	14	5
Large complex (d_3)	20	-9

1. Dari setiap data kondisi reality (setaip kolom), semua nilai dikurangi dengan nilai terbesar, maka hasilnya seperti berikut:

Tabel 4.5. Pengurangan Alternatif Pilihan Minimax Regret

Alternatif Pilihan	State of Nature	
	Strong Demand (s_1)	Weak Demand (s_2)
Small complex (d_1)	12	0
Medium complex (d_2)	6	2
Large complex (d_3)	0	16

2. Dari setiap baris dipilih nilai yang terbesar, sehingga menjadi satu kolom pilihan seperti tabel berikut:

Tabel 4.5. Pilihan terbesar Alternatif Pilihan Minimax Regret

Alternatif Pilihan	minimax regret
Small complex (d_1)	12
Medium complex (d_2)	6
Large complex (d_3)	16

3. Pada nilai yang tabel tersebut kemudian dipilih nilai yang terkecil yaitu 6 juta. Maka pilihan pada pendekatan minimax regret adalah Medium complex (d_2).

4.2. Pengambilan Keputusan Dengan Probabilitas

Pada beberapa situasi dalam pengambilan keputusan, kita dapat memperoleh nilai probabilitas dari kondisi keadaan yang terjadi. Kita dapat menggunakan nilai probabilitas untuk menghitung nilai dari expected value (EV) dalam mengidentifikasi alternatif keputusan yang terbaik.

Nilai expected value (EV) dari setiap keputusan dihitung dengan menjumlahkan nilai dari hasil setiap kondisi real dengan probabilitas dari masing-masing nilai keadaan real yang terjadi.

Untuk mencari nilai expected value (EV) dari alternatif keputusan dapat menggunakan rumus sebagai berikut:

$$EV(d_i) = \sum_{j=1}^{N} P(s_j)V_{ij}$$

Dengan syarat $P(s_j) \geq 0$ untuk semua nilai realnya.

$$\sum_{j=1}^{N} P\left(s_j\right) = P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_N) = 1$$

Dimana:

$EV(d_i)$ = expected value pada d_i

N = jumlah kondisi dari states of nature

$P(s_j)$ = probability dari state of nature yang ke s_j

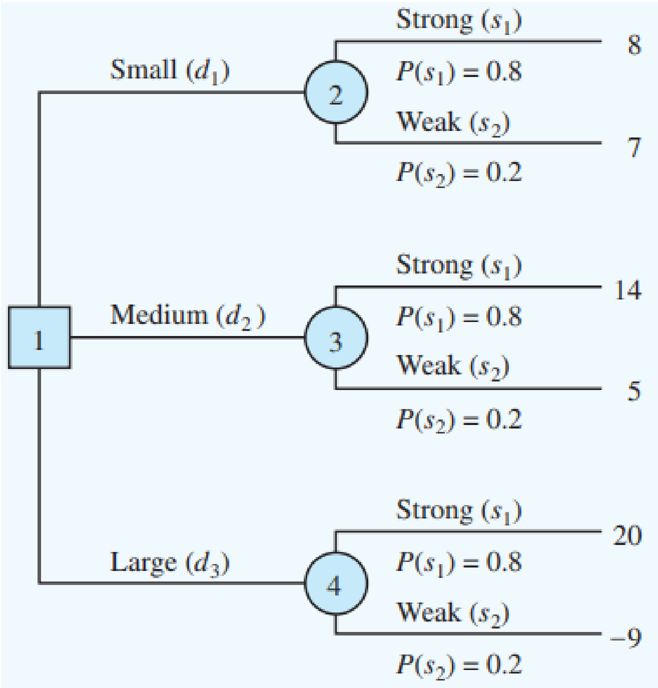
V_{ij} = nilai dari kondisi real

Contoh 4

Pada contoh 1 di atas yaitu PT. ABC akan memilih alternatif dengan data tambahan probabilitas pada masing-masing kondisi yaitu apbila kondisi lagi tinggi probabilitasnya adalah 0,8 dan apabila kondisi sedang turunm maka probabilitasnya adalah 0,2.

Dari 3 Alternatif pilihan di atas, yang ditanyakan adalah mana yang akan diputuskan untuk dibangun dengan menggunakan probabilitas?

Jawaban
Untuk menjawab kasus tersebut, kita dapat menggunakan diagram pohon untuk menggambarkan tiga pilihan dengan probabilitas dari dua kondisi yang ada seperti gambar berikut:



Gambar 4.1. Diagram pohon

Dari gambar tersebut, kita dapat menghitung expected value (EV) pada masing-masing alternatif pilihan sebagai berikut:

$EV(d_1) = 0.8(8) + 0.2(7) = 7.8$
$EV(d_2) = 0.8(14) + 0.2(5) = 12.2$
$EV(d_3) = 0.8(20) + 0.2(-9) = 14.2$

Dari hasil perhitungan tersebut, maka nilai terbesar adalah pada pilihan alternatif d_3 dengan nilai keuntungan sebesar 14,2 juta.

Dari kasus tersebut, untuk mencari EVwPI (expected value with perfect information) adalah dengan memilih nilai yang terbesar dari nilai realnya yang dikalikan dengan probabilitas pada masing-masing kondisi, maka hasilnya adalah sebagai berikut:.

EVwPI = 0.8(20) + 0.2(7) = 17,4

Dengan hasil pada pencarian nilai EV yang terbesar yaitu dengan nilai 14,2, maka komponen ini menjadi EVwoPI.

Kita dapat mencari hasil EVPI (expected value perfect information) dengan rumus:

EVPI = | EVwPI – EVwoPI |

Dimana :
EVPI = expected value of perfect information
EVwPI = expected value with perfect information
EVwoPI = expected value without perfect information

Dari hasil perhitungan di atas, maka kita dapat mecari EVPI adalah sebagai berikut:

EVPI = | EVwPI – EVwoPI |
EVPI = | 17,4 – 14,2 | = 3,2

Jadi dengan menggunakan perfect information selisihnya adalah 3,2 juta.

4.3. Pengambilan Keputusan Dengan Sample

Dalam menerapkan pendekatan nilai expected value, kita dapat menggunakan probabilitas informasi pada kondisi realnya dalam mempengaruhi perhitungan nilai expected value dan menentukan rekomendasi keputusan yang dipilih. Seringkali, pengambil keputusan memiliki nilai probabilitas awal untuk kondisi real yang merupakan nilai probabilitas terbaik yang tersedia. Namun untuk membuatnya keputusan terbaik, pembuat keputusan mungkin ingin mencari informasi tambahan tentang kondisi realnya. Informasi baru ini dapat digunakan untuk merevisi atau memperbarui probabilitas sebelumnya sehingga keputusan akhir didasarkan pada probabilitas yang lebih akurat untuk kondisi realnya. Paling sering, informasi tambahan diperoleh melalui eksperimen yang dirancang untuk memberikan informasi sampel tentang kondisi real.

Untuk mencari expected value dari sample dapat digunakan rumusnya seperti berikut ini:

EVSI = | EVwSI – EVwoSI |

Dimana :
EVSI = expected value of sample information
EVwSI = expected value with sample information
EVwoSI = expected value without sample information

Contoh 5

Pada contoh 4 dengan kasus PT. ABC, akan dilakukan penggunaan data sample dari riset market dengan kondisi probabilitasnya adalah sebagai berikut:

Probabilitas Kondisi awal tanpa sample adalah:
P(Strong demand) = 0,80
P(Weak demand) = 0,20

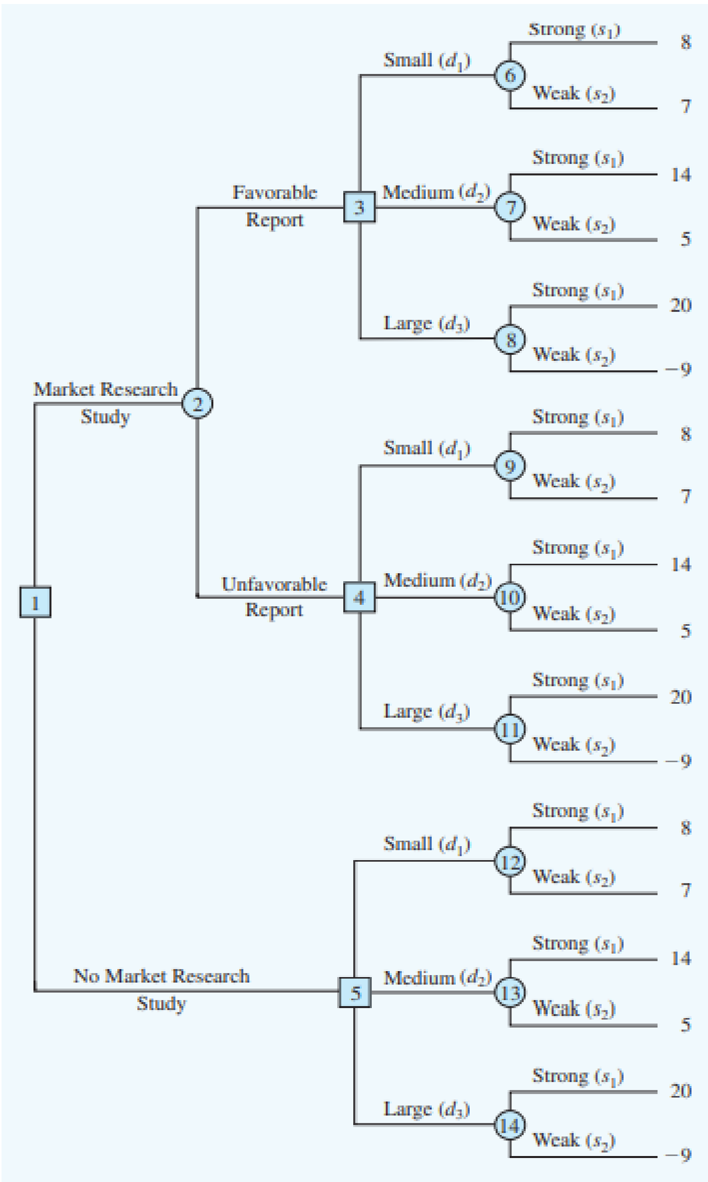
Probabilitas menggunakan data sample dari riset market adalah:
P(Favorable) = 0,77

P(Unfavorable) = 0,23
Probabilitas pada kondisi sedang Favorable adalah sebagai berikut:
P(Strong demand| favorable) = 0,94
P(Weak demand| favorable) = 0,06

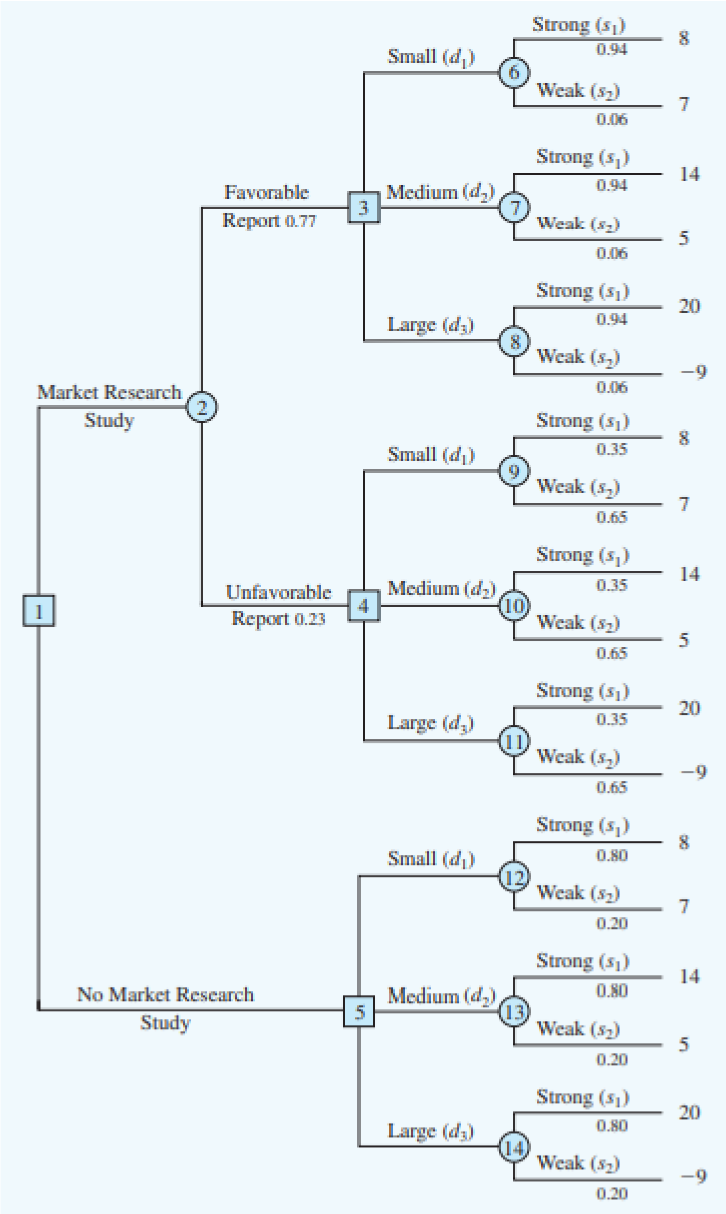
Probabilitas pada kondisi sedang Unfavorable adalah sebagai berikut:
P(Strong demand| unfavorable) = 0,35
P(Weak demand| unfavorable) = 0,65
Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Berapa EVwoSI?
b. Berapa EVwSI?
c. Berapa EVSI?

Jawaban
Untuk menjawab kasus tersebut, dapat diikuti langkah berikut ini:



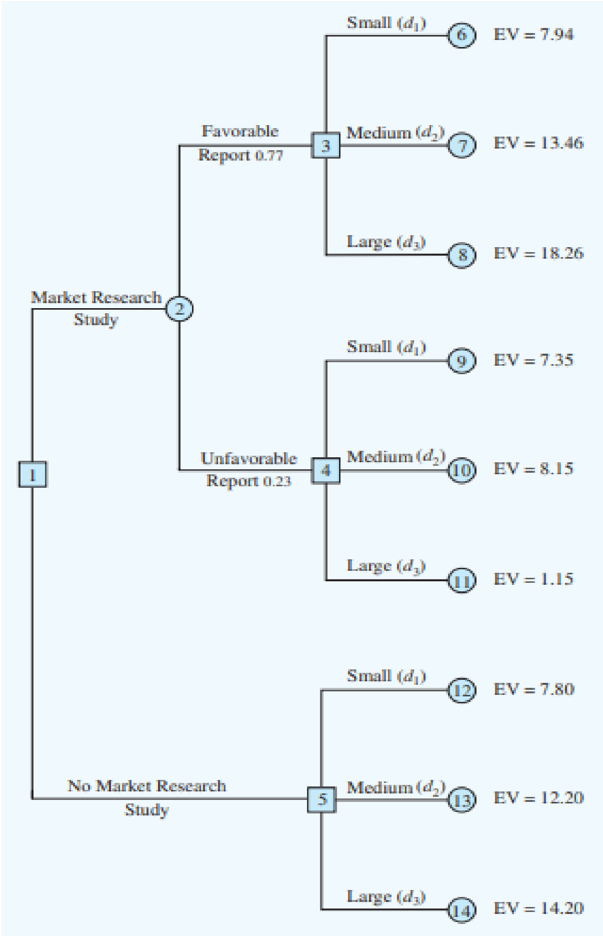
Gambar 4.2. Diagram pohon market riset



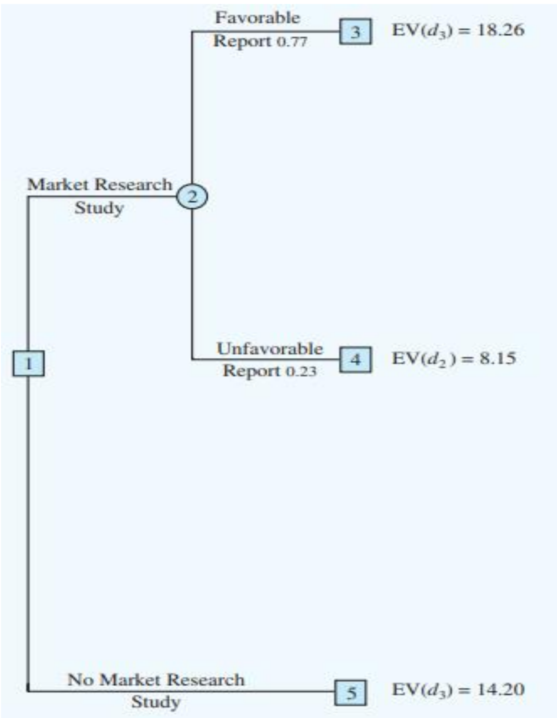
Gambar 4.3. Diagram pohon probabiliatas pada market riset

EV(Node 6) = 0.94(8) + 0.06(7) = 7.94
EV(Node 7) = 0.94(14) + 0.06(5) = 13.46
EV(Node 8) = 0.94(20) + 0.06(-9) = 18.26
EV(Node 9) = 0.35(8) + 0.65(7) = 7.35
EV(Node 10) = 0.35(14) + 0.65(5) = 8.15
EV(Node 11) = 0.35(20) + 0.65(-9) = 1.15
EV(Node 12) = 0.80(8) + 0.20(7) = 7.80
EV(Node 13) = 0.80(14) + 0.20(5) = 12.20
EV(Node 14) = 0.80(20) + 0.20(-9) = 14.20

EV(Node 3) = EV(Node 8) = 18.26
EV(Node 4) = EV(Node 10) = 8.15



Gambar 4.4. Diagram pohon penghitungan probabiliatas pada market riset



Gambar 4.5. Diagram pohon hasil probabiliatas pada market riset

EV(Node 2) = 0.77 EV(Node 3) + 0.23(Node 4)

EV(Node 2) = 0.77 (18,26) + 0.23(8,15) = 15,93

EV(Node 5) = 14,20

a. Dari hasil perhitungan di atas, dapat diketahui bahwa besarnya EvwoSI adalah:

   EVwoSI = EV(Node 5) = 14,20

b. Kemudian untuk besarnya nilai dari EVwSI adalah:

   EVwSI = EV(Node 2) = 15,93

c. Untuk mencari besarnya nilai dari EVSI adalah:

   EVSI = | EVwSI – EVwoSI |

   EVSI = | 15,93 – 14,20 |

   EVSI = 1,73

Setelah menggunakan pendekatan sample, maka dapat diketahui bahwa selisih dibanding tanpa sample sebesar 1,73 juta.

4.4. Studi Kasus Pengambilan Keputusan Menggunakan Probabilitas

1. Sebuah perusahaan yang bergerak dibidang pembuatan produk memiliki 4 alternatif pilihan produk yang akan diproduksi. Dari 4 pilihan tersebut terdapat kondisi pasar dalam penjualan mempunyai probabilitas yang berbeda-beda. Alternatif pilihan dan kondisi pasarnya dapat dilihat seperti berikut:

   Tabel 4.6. Alternatif Pilihan pada kondisi pasar

	Kondisi pasar			
Alternatif Pilihan	s_1	s_2	s_3	s_4
d_1	14	9	10	5
d_2	11	10	8	7
d_3	9	10	10	11
d_4	8	10	11	13

   Dari kasus tersebut:
   a. Pilihan alternatif yang mana dengan menggunakan pendekatan optismistic?
   b. Pilihan alternatif yang mana dengan menggunakan pendekatan konservatif?
   c. Pilihan alternatif yang mana dengan menggunakan pendekatan minimax regret?

2. Sebuah perusahaan merencanakan akan memproduksi produk pada lini produksinya. Seorang pimpinannya aka memutuskan produk jenis apa yang akan diproduksi dengan memiliki tiga pilihan alternatif seperti berikut:

   d_1 = jenis produk yang bertipe kecil
   d_2 = jenis produk yang bertipe sedang
   d_3 = jenis produk yang bertipe besar

   Berkaitan dengan rencana tersebut, kondisi permintaan pasar memiliki seperti berikut :
   s_1 = kondisi permintaan yang sedang tinggi
   s_2 = kondisi permintaan yang sedang rendah

   Hasil dari tabel pada kondisi keuntungan (dalam dolar perunit) pada kondisi pasarnya adalah sebagai berikut:

   Tabel 4.7. Alternatif Pilihan pada kondisi pasar kasus nomer 2

Alternatif Pilihan	State of Nature	
	Permintaan tinggi (s_1)	Permintaan rendah (s_2)
Produk kecil (d_1)	10	9
Produk sedang (d_2)	16	7
Produk besar (d_3)	22	3

   Pada perusahaan probabilitas tanpa menggunakan data sample market adalah sebagai berikut:
   Probabilitas Kondisi awal tanpa sample adalah:
   P(Strong demand) = 0,70
   P(Weak demand) = 0,30

Probabilitas menggunakan data sample dari data sample market adalah sebagai berikut:
P(Favorable) = 0,67
P(Unfavorable) = 0,33
Probabilitas pada kondisi sedang Favorable adalah sebagai berikut:
P(Permintaan tinggi| favorable) = 0,90
P(Permintaan rendah| favorable) = 0,10

Probabilitas pada kondisi sedang Unfavorable adalah sebagai berikut:
P(Permintaan tinggi | unfavorable) = 0,25
P(Permintaan rendah | unfavorable) = 0,75

Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Berapa EVwoSI?
b. Berapa EVwSI?
c. Berapa EVSI?

Modul Kuliah ke 5
TPK
Utilitas dan *Game Theory*

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami dan menentukan keputusan menggunakan utilitas.
2. Memahami dan merumuskan persaiangan *game theory*.
3. Mencari penyelesaian masalah dalam proses pengambilan keputusan dalam *game theory*

5.1. Konsep Utilitas

Utilitas adalah ukuran dari total nilai atau keinginan relatif dari hasil tertentu. Hal ini dapat mencerminkan sikap pengambil keputusan terhadap sekumpulan faktor seperti laba, rugi, dan risiko. Para peneliti telah menemukan bahwa selama nilai keuntungan dari kondisi pasar dalam kisaran yang dianggap pembuat keputusan masuk akal. Dalam memilih alternatif keputusan dengan nilai keuntungan terbaik yang diharapkan biasanya mengarah pada pemilihan keputusan yang paling disukai. Namun, ketika imbalannya ekstrem, pembuat keputusan sering kali tidak puas atau gelisah dengan keputusan yang hanya memberikan nilai keuntungan terbaik yang diharapkan.

Sebagai contoh situasi di mana utilitas dapat membantu dalam memilih alternatif keputusan yang terbaik. Swofford, Inc., real estat perusahaan investasi yang relatif kecil pada saat ini memiliki dua peluang investasi yang membutuhkan sekitar pengeluaran kas yang sama. Persyaratan uang tunai yang diperlukan melarang Swofford melakukan lebih dari satu investasi saat ini. Karena itu, tiga alternatif keputusan yang memungkinkan dapat dipertimbangkan.

Tiga alternatif pilihan yang dilambangkan dengan d1,d2, dan d3 seperti berikut:

d_1 = berinvestasi pada jenis A
d_2 = berinvestasi pada jenis B
d_3 = Tidak berinvestasi

Hasil keuntungan pada peluang investasi tergantung pada keputusan investasi dan pada arah pasar real estat selama enam bulan ke depan. Kondisi harga pada pasar real estat yaitu akan naik, tetap stabil, dan turun. Maka kita dapat mendefinisikan kondisi pasar dengan s_1,s_2, dan s_3 sebagai berikut:

s_1 = kondisi harga pasar real estate sedang naik
s_2 = kondisi harga pasar real estate sedang stabil
s_3 = kondisi harga pasar real estate sedang turun

Dari harga kondisi pasar terbaik yang tersedia, Swofford memperkirakan laba, atau imbalan, yang terkait dengan setiap alternatif keputusan dari harga kondisi pasar dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 5.1. harga kondisi pasar pada Swofford, Inc

	Harga kondisi pasar		
Alternatif pilihan	Harga naik	Harga stabil	Harga turun
Investasi A (d1)	$ 30.000	$ 20.000	-$ 50.000
Investasi B (d2)	$ 50.000	-$ 20.000	-$ 30.000
Tidak Investasi (d3)	$ 0	$ 0	$ 0

Pada masing-masing harga kondisi pasar, Estimasi terbaik probabilitas menunjukkan bahwa harga real estat akan naik adalah 0,3; estimasi terbaik dari probabilitas bahwa harga akan tetap stabil adalah 0,5; dan estimasi terbaik dari probabilitas bahwa harga akan turun adalah 0,2. Kita dapat menghitung nilai laba yang diharapkan untuk ketiga alternatif keputusan tersebut adalah sebagai berikut:

$$EV(d_1) = 0{,}3(\$\ 30.000) + 0{,}5(\$\ 20.000) + 0{,}2(-\$\ 50.000) = \$\ 9000$$
$$EV(d_2) = 0{,}3(\$\ 50.000) + 0{,}5(-\$\ 20.000) + 0{,}2(-\$\ 30.000) = -\$\ 1000$$
$$EV(d_3) = 0{,}3(\$\ 0) + 0{,}5(\$\ 0) + 0{,}2(\$\ 0) = \$\ 0$$

Hasil dari perhitungan menggunakan pendekatan expected value, keputusan yang optimal adalah memilih investasi A dengan nilai laba yang diharapkan sebesar $ 9000. Apakah ini benar-benar alternatif keputusan terbaik? Mari kita pertimbangkan beberapa faktor lain yang berhubungan dengan kemampuan Swofford untuk menyerap kehilangan $ 50.000 jika investasi A dibuat dan harga kondisi pasar yang turun.

Utilitas dapat digunakan untuk dalam rangka untuk mengurangi tingkat risiko yang tinggi dengan mempertimbangkan semua risiko dan konsekuensi yang ada. Penggunaan utilitas dapat dengan mempertimbangkan semua konsekuensi dapat memberikan harapan yang tertinggi dalam memilih alternatif pilihan yang terbaik.

Prosedur dalam menggunakan utilitas, terlebih dahulu harus menetapkan nilai dari utilitasnya dari kemungkinan yang terburuk sapmpai yang terbaik. Dari kasus di atas, kemungkinan yang terburuk adalah mengalami kerugian sebesar -$ 50.000 dan kemungkinan kondisi yang terbaik adalah mendapat keuntungan sebesar $ 50.000. Kita dapat menuliskan persamaan utilitasnya sebagai berikut:

Utility dari -$ 50.000 = U(-$ 50.000) = 0
Utility dari $ 50.000 = U($ 50.000) = 10

Utilitas yang lainnya dapat ditentukan dengan nilai antara 0 dan 10 tersebut. Untuk itu kita dapat mengasumsikan perbedaan (indifferent) probabilitas dari maisng-masing nilai pada kondisi pasar.

Misalnya keuntungan pada :

nilai $ 50.000 dengan probabilitas p
nilai -$ 50.000 dengan probabilitas (1 – p)

Jika p mendekati 1, maka keputusan dapat memilih alternatif dengan keunungan $ 50.000 atau $ 30.000. Apabila p mendekati nilai 0, maka memilih alternatif keuntungan yang besar tidak bisa menjauhkan dari risiko yang besar.

Misalkan indifferent probabilitas p = 0,95 untuk nilai $ 30.000, maka kita dapat menghitung nilai untilitasnya sebagai berikut:

U($ 30.000) = pU($ 50.000) + (1 – p)U(-$ 50.000)
= 0,95(10) + (0,05)(0)
= 9,5

Dengan cara yang sama kita dapat memberikan asumsi perbedaan (indifferent) pada nilai yang lain seperti berikut:

Tabel 5.2. indefferent dan utilitas pada Swofford, Inc

Nilai Keuntungan	Nilai Indifferent (p)	Nilai Utilitas
$ 50.000	Tidak dipilih	10
$ 30.000	0,95	9,5
$ 20.000	0,90	9,0
$ 0	0,75	7,5
-$ 20.000	0,55	5,5
-$ 30.000	0,40	4,0
-$ 50.000	Tidak dipilih	0

Setelah penentuan nilai utilitasnya, kita dapat menyusun ulang tabel keuntungan investasi dengan nilai dari utilitasnya seperti berikut:

Tabel 5.3. Nilai utilitas keuntungan kondisi pasar pada Swofford, Inc

	Harga kondisi pasar		
Alternatif pilihan	Harga naik	Harga stabil	Harga turun
Investasi A (d1)	9,5	9,0	0,0
Investasi B (d2)	10	5,5	4,0
Tidak Investasi (d3)	7,5	7,5	7,5

Dari tabel tersebut kita dapat menghitung keunutunga dengan nilai expected utility (EU) dengan rumus seperti berikut:

$$EU(d_i) = \sum_{j=1}^{N} P(s_j)U_{ij}$$

Hasil perhitungan expected utility pada masing-masing alternatif pilihan adalah sebagai berikut:

$EU(d_1)$ = 0,3(9,5) + 0,5(9,0) + 0,2(0) = 7,35
$EU(d_2)$ = 0,3(10) + 0,5(5,5) + 0,2(4,0) = 6,55
$EU(d_3)$ = 0,3(7,5) + 0,5(7,5) + 0,2(7,5) = 7,50

Dari perhitungan tersebut dapat dilihat bahwa hasil nilai yang paling besar keuntungannya adalah alternatif pilihan d_3 sebesar 7,5.
Apabila hasil ini dibandingkan dengan hasil yang pertama tanpa menggunakan nilai utilitas dapat dilihat sebagai berikut:

Tabel 5.4. Urutan tertinggi Expected Utility keuntungan

Urutan tertinggi	Expected Utility	Expected monetary value
Tidak invest	7,50	$ 0
Investasi A	7,35	$ 9000
Investasi B	6,55	-$ 1000

Kita dapat menentukan asumsi pada masing-masing alternatif pilihan kasus di atas dengan nilai dari perbedaan (*indifferent*) probabilitasnya dibawah 0,5, maka ini disebut dengan keputusan mengambil risiko (*risk taker*). Asusmsi perbedaan (*indifferent*) dapat dilihat seperti tabel berikut ini:

Tabel 5.5. indefferent dan utilitas risk taker pada Swofford, Inc

Nilai Keuntungan	Nilai Indifferent (p)	Nilai Utilitas
$ 50.000	Tidak dipilih	10
$ 30.000	0,50	5,0
$ 20.000	0,40	4,0
$ 0	0,25	2,5
-$ 20.000	0,15	1,5
-$ 30.000	0,10	1,0
-$ 50.000	Tidak dipilih	0

Setelah penentuan nilai utilitasnya, kita dapat menyusun ulang tabel keuntungan investasi dengan nilai dari utilitasnya seperti berikut:

Tabel 5.6. Nilai utilitas keuntungan kondisi pasar pada Swofford, Inc

	Harga kondisi pasar		
Alternatif pilihan	Harga naik	Harga stabil	Harga turun
Investasi A (d1)	5,0	4,0	0,0
Investasi B (d2)	10	1,5	1,0
Tidak Investasi (d3)	2,5	2,5	2,5

Dari tabel tersebut kita dapat menghitung keunutunga dengan nilai expected utility (EU) dengan rumus seperti berikut:

$$EU(d_i) = \sum_{j=1}^{N} P(s_j)U_{ij}$$

Hasil perhitungan expected utility pada masing-masing alternatif pilihan adalah sebagai berikut:

$EU(d_1) = 0,3(5,0) + 0,5(4,0) + 0,2(0) = 3,50$

$EU(d_2) = 0,3(10) + 0,5(1,5) + 0,2(1,0) = 3,95$

$EU(d_3) = 0,3(2,5) + 0,5(2,5) + 0,2(2,5) = 2,50$

Dari perhitungan tersebut dapat dilihat bahwa hasil nilai yang paling besar keuntungannya adalah alternatif pilihan d_2 sebesar 3,95.

Apabila hasil ini dibandingkan dengan hasil yang pertama tanpa menggunakan nilai utilitas dapat dilihat sebagai berikut:

Tabel 5.7. Urutan tertinggi dengan angka utilitas

Urutan tertinggi	Expected Utility	Expected monetary value
Investasi B	3,95	-$ 1000
Investasi A	3,50	$ 9000
Tidak invest	2,50	$ 0

5.2. Konsep *Game Theory*

Dalam teori permainan ada dua atau lebih pengambil keputusan yang disebut pemain, dan mereka bersaing sebagai lawan antara yang satu dengan yang lainnya. Setiap pemain memilih strategi secara mandiri tanpa mengetahui terlebih dahulu strategi pemain lain. Kombinasi dari strategi bersaing memberikan nilai permainan untuk para pemain. Aplikasi teori permainan telah dikembangkan untuk situasi di mana pemain yang bersaing adalah tim, perusahaan, kandidat politik, tentara, dan penawar kontrak.

a. Permainan Strategi Murni (Pure-Strategy Game)

Pada permainan *pure strategy*, strategi optimal pada setiap pemain dengan menggunakan strategi tunggal. Pemain baris mengidentifikasikan strategi optimalnya melalui kriteria maksimal dari minimal (maximin) dan pemain kolom dengan kriteria minimal dari maksimal (minimax). Nilai yang dicapai harus merupakan maksimum dari minimax baris dan minimum dari maksimin kolom, titik ini dikenal sebagai titik pelana (saddle point).

Bila nilai minimaks tidak sama dengan nilai maksimin maka permainan tidak dapat dipecahkan dengan strategi murni.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Carilah nilai minimum baris dan maksimum kolom.
2. Dari nilai-nilai minimum setiap baris cari nilai maksimalnya atau disebut nilai maksimin. Sedangkan dari nilai maksimum kolom tentukan satu nilai minimal sebagai nilai minimaks.
3. Bila nilai minimaks sama dengan nilai maksimin, berarti strategi yang paling optimal untuk masing-masing pemain telah ditemukan

Dari contoh soal (dari table sebelumnya), penyelesaian teori permainannya adalah seperti tabel berikut:

Tabel 5.8. Pilihan strategi perusahaan A dan B pada *Pure-Strategy Game*

Perusahaan A	**Perusahaan B**			
	b_1	b_2	b_3	Minimum
a_1	4	3	2	**2**
a_2	-1	4	1	-1
a_3	5	-2	0	-2
Maksimum	5	4	**2**	

Pilih Minimum dari maksimum (maximin)

Pilih Maksimum dari minimum (minimax)

Dari hasil tabel diatas terlihat bahwa nilai maksimin dan minimaks sama yaitu sebesar 2, sehingga strategi yang optimal untuk A adalah strategi a_1 pada baris dimana terdapat nilai maksimal dari minimal pada kolomnya dan untuk B adalah strategi b_3 strategi dimana terdapat nilai minimal dari maksimal pada barisnya.

b. Permainan Strategi Campur (Mixed-Strategy Game)
Apabila hasil dari srtategi nilai maksimin dan nilai minimaks tidak sama, maka kita tidak bisa menggunakan strategi murni (*pure strategy game*), tetapi kita dapat menggunakan strategi campuran (mixed strategy game). Untuk penyelesaian strategi campuran kita dapat melihat pada contoh berikut ini.

Pada permainan sepak bola yang berhadapan antara tim A dan Tim B dengan mempunyai strategi masing-masing. Strategi pada tim A mempunyai strategi a_1 dan a_2, sedang tim B memiliki strategi b_1 dan b_2 seperti berikut ini.

Tabel 5.9. Pilihan strategi perusahaan A dan B pada *Mixed-Strategy Game*

Tim A	**Tim B**			
	b_1	b_2	b_3	Minimum
a_1	0	-1	2	**-1**
a_2	5	4	-3	-3
a_3	2	3	-4	-4
Maksimum	5	4	**2**	

Pilih Minimum dari maksimum (maximin)

Pilih Maksimum dari minimum (minimax)

Dari hasil tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai dari minimax dan nilai maximin tidak sama, berarti dalam hal ini tidak dapat dikatakan sama-sama optimal.

Untuk penyelesai kasus ini kita dapat menggunakan strategi campuran (*mixed strategy game*).

Langkah-langkah dalam strategi campuran dengan jumlah baris dan kolom lebih dari 2 adalah sebagai berikut:

1) Pertahankan strategi baris yang nilainya paling mendominasi terbesar pada baris, sehingga menjadi 2 baris.
2) Pertahankan strategi kolom yang nilainya paling mendominasi terkecil pada kolom, sehingga menjadi 2 kolom.
3) Gunakan persamaan linier untuk mencari nilai dari masing-masing strategi, apabila kedua nilai strategi sudah sama, maka dapat dikatakan optimal.

Penyelesaian pada kasus di atas, dapat dilihat seperti berikut:

Tabel 5.10. Eliminasi pilihan strategi perusahaan A

Tim A	Tim B			
	b_1	b_2	b_3	Minimum
a_1	0	-1	2	**-1**
a_2	5	4	-3	-3
a_3	2	3	-4	-4
Maksimum	**5**	**4**	**2**	

Dari tabel tersebut terlihat bahwa strategi a_3 dapat dieliminasi, karena tidak ada nilai yang dominan. Setelah strategi a_3 dieliminasi, maka tampilan tabelnya menjadi berikut:

Tabel 5.11. Eliminasi pilihan strategi perusahaan B

Tim A	Tim B			
	b_1	b_2	b_3	Minimum
a_1	0	**-1**	2	**-1**
a_2	5	4	**-3**	-3
Maksimum	5	4	2	

Dari tabel tersebut terlihat bahwa strategi kolom b_1 dapat dieliminasi, karena tidak ada nilai yang dominan. Setelah kolom b_1 dieliminasi, maka tampilan tabelnya menjadi berikut

Tabel 5.12. Hasil Eliminasi pilihan strategi perusahaan A dan B

Tim A	Tim B	
	b_2	b_3
a_1	-1	2
a_2	4	-3

Dari tabel di atas kita dapat menggunakan persamaan linier untuk mencari nilai dari strategi dari Tim A dan Tim B seperti berikut:

b. Persamaan Tim A

Jika $a_1 = p$, maka $a_2 = (1 - p)$

- $EV_1 = -1p + 4(1-p)$
- $EV_2 = 2p + (-3)(1 – p)$

Maka:

$$-p + 4 - 4p = 2p - 3 + 3p$$
$$4 – 5p = -3 + 5p$$
$$4 + 3 = 5p + 5p$$
$$7 = 10p$$
$$p = 7/10$$
$$p = 0{,}7$$

- EV_1 = -1p + 4(1-p)
- EV_1 = -1(0,7) + 4(1-0,7)
- EV_1 = -0,7 + 4(0,3)
- EV_1 = -0,7 + 1,2
- EV_1 = 0,5

c. Persamaan Tim B

   Jika b_2 = q , maka b_3 = (1 - q)
   - EV_1 = -1q + 2(1-q)
   - EV_2 = 4q + (-3)(1 – q)

   Maka: -q + 2 – 2q = 4q -3 + 3q

   2 – 3q = -3 + 7q

   2 + 3 = 3q + 7q

   5 = 10q

   q = 5/10

   q = 0,5
   - EV_1 = -1q + 2(1-q)
   - EV_1 = -1(0,5) + 2(1-0,5)
   - EV_1 = -0,5 + 2 - 1
   - EV_1 = -0,5 + 1
   - EV_1 = 0,5

Dari hasil perhitungan persamaan di atas terlihat bahwa nilai dari EV pada Tim A sama dengan EV pada tim B, artinya bahwa strategi pada kedua tim tersebut sudah Optimal.

5.3. Studi Kasus Penggunaan Utilitas dan *Game Threory* Pada Perusahaan

1. Sebuah perusahaan yang bergerak dalam bidang investasi memiliki 3 alternatif pilihan jenis investasi. Dari 3 pilihan tersebut terdapat 3 kondisi ekonomi yang mempunyai probabilitas yang berbeda-beda. Nilai keuntungan dari alternatif pilihan (dalam juta) dan kondisi ekonomi dapat dilihat seperti tabel berikut:

   Tabel 5.13. Alternatif pilihan dan kondisi ekonomi

	Kondisi Ekonomi		
Alternatif Pilihan	Naik (s_1)	Stabil (s_2)	Turun (s_3)
Investasi A ($d_{1)}$	100	25	0
Investasi B (d_2)	75	50	25
Investasi C (d_3)	50	50	50
Probabilitas	0,4	0,3	0,3

   Untuk memutuskan alternatif pilihan mana yang akan dipilih, ada 2 orang analis yaitu Andi dan Budi yang memberikan different probabilitasnya seperti berikut:

   Tabel 5.14. Perbedaan probabilitas

	Indifferent Probabilitay (p)	
Keuntungan	Andi	Budi
75 juta	0,8	0,6
50 juta	0,6	0,3
25 juta	0,3	0,15

   Dari kasus tersebut:
   a. Pilihan alternatif yang mana dengan seorang analis Andi?
   b. Pilihan alternatif yang mana dengan seorang analis Budi, dibanding analis Andi, mana yang keuntungannya lebih besar?

2. Dua perusahaan bersaing memperebutkan pangsa pasar minuman ringan. Masing-masing bekerja dengan agen periklanan untuk mengembangkan alternatif strategi periklanan untuk tahun mendatang. Berbagai iklan televisi, promosi produk, tampilan di dalam toko, dan sebagainya menyediakan empat strategi berbeda untuk setiap perusahaan. Tabel berikut merangkum proyeksi perubahan pangsa pasar untuk perusahaan A dan perusahaan B dengan alternatif pilhan strategi periklanan untuk tahun mendatang.

Tabel 5.15. Pilihan strategi perusahaan A dan B pada soal 2

Perusahaan A	**Perusahaan B**			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	3	0	2	4
a_2	2	-2	1	0
a_3	4	2	5	6
a_4	-2	6	-1	0

Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Strategi mana yang dipilih oleh perusahaan A dan perusahaan B?
b. Berapa solusi optimal untuk game ini untuk masing-masing perusahaan?
c. Berapa nilai permainannya?

Modul Kuliah ke 6

TPK

Analisis *Time Series* Dan *Forecasting*

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami konsep analisis analisis data *time series* dan *forecasting.*
2. Memahami metode *Moving average.*
3. Memahami metode *Exponential smoothings*
4. Memahami metode *Trend Projection*
5. Menghitung dan memprediksi periode selanjutnya dengan metode *Moving average, Exponential smoothing,* dan *Trend Projection*

6.1. Konsep *Time Series Patterns*

Time series merupakan urutan pengamatan pada variabel yang diukur pada titik-titik waktu yang berurutan selama periode waktu tertentu. Pengukuran time series dapat dilakukan dalam setiap jam, hari, minggu, bulan, atau tahun, atau pada kurun waktu interval tertentu.

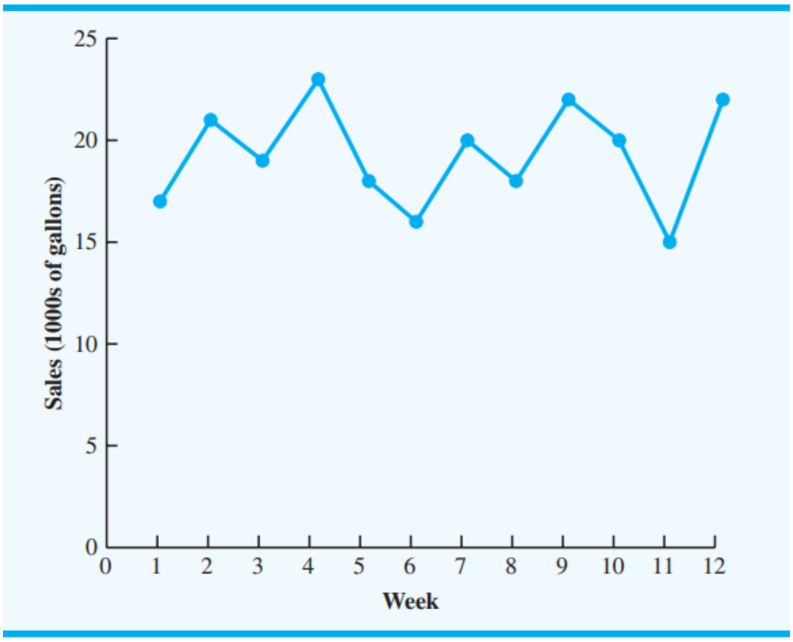
Pola data hasil dari obserpasi merupakan faktor penting dalam memahami bagaimana time series berperilaku di masa lalu. Untuk mengidentifikasi pola data, langkah pertama yang dapat dilakukan adalah dengan menyusun data plot dari time series. Data plot time series adalah gambaran grafis dari hubungan antara waktu yang digambarkan pada sumbu horizontal dengan data pada variabel berdasarkan deret waktu digambarkan pada sumbu vertikal.

Contoh di bawah ini memperlihatkan tabel data penjualan bensin berdasarkan periode waktu mingguan

Tabel 6.1. Data penjualan bensin dalam 12 minggu

Week	Sales (1000s of gallons)
1	17
2	21
3	19
4	23
5	18
6	16
7	20
8	18
9	22
10	20
11	15
12	22

Tabel di atas dapat digambarkan ke dalam grafik plot seperti gambar berikut:



Gambar 6.1. Grafik Data Plot

6.2. Metode *Moving average*

Metode moving averages dilakukan dengan menggunakan rata-rata nilai data k terbaru dalam time series sebagai prediksi pada periode berikutnya. Rumus yang dapat digunakan seperti berikut:

$$F_{t+1} = \frac{\sum(\text{most recent } k \text{ data values})}{k} = \frac{\sum_{i=t-k+1}^{t} Y_i}{k}$$
$$= \frac{Y_{t-k+1} + \cdots + Y_{t-1} + Y_t}{k}$$

Dimana :

F_{t+1} adalah forecast data time series untuk period t + 1

Y_i actual value of the time series in period i

k adalah jumlah periode dari data time series digunakan untuk menentukan prediksinya

Contoh Kasus 1:

Dari data penjualan bensin seperti pada tabel 1, kita dapar memprediksi untuk ke 13 dengan menggunakan metode moving average 3 minggu.

Solusi pada kasus 1 dapat dilakukan seperti berikut:

- Untuk menentukan forecast pada minggu ke 4 kita dapat menghitung rata-rata dari 3 data dari minggu ke 1 sampai ke 3 seperti berikut:

$$F_4 = \text{average of weeks 1 to 3} = \frac{17 + 21 + 19}{3} = 19$$

$$F_5 = \text{average of weeks 2 to 4} = \frac{21 + 19 + 23}{3} = 21$$

Dan seterusnya sampai minggu F_{13}

- Hasil perhitungannya dapat dilihat seperti tabel berikut:

Tabel 6.2. Penghitungan metode moving averages

Week	Time Series Value	Forecast	Forecast Error	Absolute Value of Forecast Error	Squared Forecast Error	Percentage Error	Absolute Value of Percentage Error
1	17						
2	21						
3	19						
4	23	19	4	4	16	17.39	17.39
5	18	21	−3	3	9	−16.67	16.67
6	16	20	−4	4	16	−25.00	25.00
7	20	19	1	1	1	5.00	5.00
8	18	18	0	0	0	0.00	0.00
9	22	18	4	4	16	18.18	18.18
10	20	20	0	0	0	0.00	0.00
11	15	20	−5	5	25	−33.33	33.33
12	22	19	3	3	9	13.64	13.64
		Totals	0	24	92	−20.79	129.21

Dari tabel di atas dapat kita cari forcast untuk minggu ke 13 adalah sebagai berikut:

$$F_{13} = \text{average of weeks 10 to 12} = \frac{20 + 15 + 22}{3} = 19$$

Pengukuran Akuras Forcast dapat menggunakan :

d. MAE

Dengan rumus:

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} |e_t|}{n - k}$$

e. MSE

Dengan Rumus :

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} e_t^2}{n - k}$$

f. MAFE

Dengan rumus :

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \left| \left(\frac{e_t}{Y_t} \right) 100 \right|}{n - k}$$

Dari kasus 1 kita dapat menghitung akurasinya sebagai berikut:

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{t=4}^{12} |e_t|}{12 - 3} = \frac{24}{9} = 2.67$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=4}^{12} e_t^2}{12 - 3} = \frac{92}{9} = 10.22$$

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{t=4}^{12} \left| \left(\frac{e_t}{Y_t} \right) 100 \right|}{12 - 3} = \frac{129.21}{9} = 14.36\%$$

6.3. Metode *Exponential smoothings*

Metode *Exponential smoothings* adalah metode peramalan atau prediksi data time series dengan menggunakan bobot untuk menentukan forecast datanya. Rumus untuk menggunakan metode ini dapat dilihat seperrti berikut:

$$F_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) F_t$$

Dimana:

F_{t+1} adalah forecast data time series untuk periode t +1

Y_t adalah data aktual data time series pada periode t

F_t adalah forecast data time series untuk periode t

a adalah konstanta smoothing ($0 \leq a \leq 1$)

Contoh Kasus 2

Dari Contoh kasus 1 penjualan bensin, pemilik ingin mengetahui peramalan datanya, apabila menggnakan metode *Exponential smoothings* dengan α = 0,2. Dengan akurasi menggunakan MAE, MSE, dan MAFE.

Solusi pada kasus 2 dapat Hasilnya dapat dilihat seperti berikut:

$$\begin{aligned} F_2 &= \alpha Y_1 + (1 - \alpha) F_1 \\ &= \alpha Y_1 + (1 - \alpha) Y_1 \\ &= Y_1 \end{aligned}$$

- Dari rumus tersebut dapat kita tentukan hasil forecast minggu ke-2 adalah sama dengan nilai pada minggu ke-1 dengan nilainya adalah 17
- Untuk forecast minggu ke-3 dan ke-4 dapat menggunakan rumus di atas, maka hasilnya dapat dilihat pada tampilah berikut:

$$F_3 = 0.2Y_2 + 0.8F_2 = 0.2(21) + 0.8(17) = 17.8$$
$$F_4 = 0.2Y_3 + 0.8F_3 = 0.2(19) + 0.8(17.8) = 18.04$$

- Untuk prediksi forecast minggu ke-13 dengan menggunakan rumus sama, maka hasilnya dapat dilihat pada tampilah berikut:

$$F_{13} = 0.2Y_{12} + 0.8F_{12} = 0.2(22) + 0.8(18.48) = 19.18$$

- Hasil tabel lengkapnya dapat dilhat seperti di bawah ini:

Tabel 6.3. Penghitungan metode *Exponential smoothings*

Week	Time Series Value	Forecast	Forecast Error	Squared Forecast Error
1	17			
2	21	17.00	4.00	16.00
3	19	17.80	1.20	1.44
4	23	18.04	4.96	24.60
5	18	19.03	−1.03	1.06
6	16	18.83	−2.83	8.01
7	20	18.26	1.74	3.03
8	18	18.61	−0.61	0.37
9	22	18.49	3.51	12.32
10	20	19.19	0.81	0.66
11	15	19.35	−4.35	18.92
12	22	18.48	3.52	12.39
		Totals	10.92	98.80

Untuk menetukan akurasinya dapat menggunakan rumus yang sama dengan metode Moving Average sebelumnya. Akurasi yang baik adalah akurasi yang nilainya paling kecil.

6.4. Metode *Trend Projection*

Metode *Trend Projection* adalah metode peramalan atau prediksi data time series dengan menentukan dulu persamaan linearnya untuk menentukan forecast data prediksinya. Persamaan liniernya dapat dilihat seperti berikut:

$$F_t = b_0 + b_1 t$$

Dimana :

t adalah waktu per periode

F_t adalah nilai trend forecast untuk periode t

b_0 adalah intercept garis trend

b_1 adalah slope dari garis trend

Rumus untuk mencari b_1 dan b_0 dapat dilihat seperrti berikut

$$b_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} tY_t - \sum_{t=1}^{n} t \sum_{t=1}^{n} Y_t \Big/ n}{\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2 \Big/ n}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{t}$$

Dimana:

t adalah waktu per periode

Y_t adalah data aktual dari data time series pada periode t

n adalah jumlah periode pada data time series

$\bar{Y}$ adalah rata-rata nilai dari data time series, rumusnya: $\bar{Y} = \sum_{t=1}^{n} Y_t \Big/ n$

$\bar{t}$ adalah rata-rata dari nilai t, rumusnya: $\bar{t} = \sum_{t=1}^{n} t \Big/ n$

Contoh Kasus 3

Seorang pedagang menjual sepeda setiap tahunnya, akan mencari forecast untuk tahun-tahun mendatang dengan menggunakan *Trend Projection*. Data penjualan sepeda dalam 10 tahun terakhir dapat dilihat pada tabel berikkut:

Tabel 6.4. Data penjualan sepeda dalam 10 tahun

Year	Sales (1000s)
1	21.6
2	22.9
3	25.5
4	21.9
5	23.9
6	27.5
7	31.5
8	29.7
9	28.6
10	31.4

Solusi pada kasus 3 dapat Hasilnya dapat dilihat seperti berikut:

- Untuk melengkapi rumus dalam mencari variabel b_1 dan b0 kita lengkapi dulu masing-masing dari rumus tersebut seperti berikut:

Tabel 6.5. Penghitungan metode *Trend Projection*

	t	Y_t	tY_t	t^2
	1	21.6	21.6	1
	2	22.9	45.8	4
	3	25.5	76.5	9
	4	21.9	87.6	16
	5	23.9	119.5	25
	6	27.5	165.0	36
	7	31.5	220.5	49
	8	29.7	237.6	64
	9	28.6	257.4	81
	10	31.4	314.0	100
Totals	55	264.5	1545.5	385

- Dari tabel di atas kita dapat menghitung nilai dari :

$$\bar{t} = \frac{55}{10} = 5.5$$
$$\bar{Y} = \frac{264.5}{10} = 26.45$$
$$b_1 = \frac{1545.5 - (55)(264.5)/10}{385 - 55^2/10} = 1.10$$
$$b_0 = 26.45 - 1.10(5.5) = 20.40$$

- Maka kita dapat menuliskan persamaan trend nya seperti berikut:

$$F_t = 20.4 + 1.1t$$

- Dari persamaan linier kita dapat menghitung forecast untuk minggu ke 11 seperti berikut:

$$F_{11} = 20.4 + 1.1(11) = 32.5$$

- Hasil tabel lengkapnya dapat dilihat seperti berikut:

Tabel 6.6. Penghitungan forecast error

Week	Sales (1000s) Y_t	Forecast F_t	Forecast Error	Squared Forecast Error
1	21.6	21.5	0.1	0.01
2	22.9	22.6	0.3	0.09
3	25.5	23.7	1.8	3.24
4	21.9	24.8	−2.9	8.41
5	23.9	25.9	−2.0	4.00
6	27.5	27.0	0.5	0.25
7	31.5	28.1	3.4	11.56
8	29.7	29.2	0.5	0.25
9	28.6	30.3	−1.7	2.89
10	31.4	31.4	0.0	0.00
			Total	30.70

- Untuk menghitung akurasi dapat kita lihat seperti berikut:

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n} = \frac{30.7}{10} = 3.07$$

- Kelebihan forecast dapat menghitung prediksi untuk hasil prediksi ke dua atau tiga kalinya dari data yang terakhir seperti pada kasus penjualan sepeda ini dapat memprediksi untuk minggu ke 12 dan ke 13 seperti berikut:

$$F_{12} = 20.4 + 1.1(13) = 33.6$$
$$F_{13} = 20.4 + 1.1(14) = 34.7$$

6.5. Studi Kasus Perhitungan *Forecasting* pada Toko Pakaian

Sebuah toko pakaian melakukan aktivitasnya dengan menjual pakaian baik pakaian pria dan wanita. Pemilik toko pakaian ini ingin mengetahui prediksi penjualan baju pria untuk minggu mendatang agar pembelian dari pemasoknya dapat disesuaikan dengan banyaknya baju yang biasa terjual. Untuk dapat memprediksi penjualan baju dalam beberapa minggu kedepan dengan menggunakan beberapa metode, dibutuhkan data history sebelumnya. Data penjualan baju pria yang didapat dalam 12 minggu terakhir dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 6.6. Data penjualan baju pria dalam 12 minggu

Minggu ke	Jumlah penjualan baju
1	15
2	23
3	19
4	12
5	20
6	13
7	24
8	26

Tugas

Berdasarkan studi kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!

a. Menggunakan metode Moving average 3, Berapa prediksi penjualan baju pria untuk minggu ke 9? Berapa ukuran akurasinya menggunakan MAE, MSE, MAFE?
b. Menggunakan metode Moving average 4, Berapa prediksi penjualan baju pria untuk minggu ke 9? Berapa ukuran akurasinya menggunakan MAE, MSE, MAFE?
c. Menggunakan metode Smoothing α= 0,2, Berapa prediksi penjualan baju pria untuk minggu ke 9? Berapa ukuran akurasinya menggunakan MAE, MSE, MAFE?
d. Menggunakan metode Trend Projection , Berapa prediksi penjualan baju pria untuk minggu ke 9 dan ke 12? Berapa ukuran akurasinya menggunakan MAE, MSE, MAFE?
e. Dari ke empat metode di atas : a,b, c, dan d, metode yang mana yang paling akurat? Jelaskan alasannya!

Modul Kuliah ke 7

TPK

Pengenalan *Linear Programming*

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep *Linear Programming.*
2. Memahami *Simple Maximization Problem.*
3. Memahami *Graphical Solution Procedure*
4. Membuat dan menghitung solusi *Linear Programming* yang optimal

7.1. Konsep *Linear Programming*

Pemrograman linier adalah pendekatan pemecahan masalah yang dikembangkan untuk membantu manajer membuat keputusan. Sejumlah aplikasi pemrograman linier dapat ditemukan dalam lingkungan persaingan bisnis saat ini.

Untuk mengilustrasikan beberapa contoh kasus masalah yang terjadi pada pemrograman linear, Contoh kasus pertimbangkan yang dihadapi industri diantaranya seperti berikut:

a. Sebuah Pabrik ingin mengembangkan jadwal produksi dan kebijakan persediaan untuk memenuhi permintaan penjualan di masa mendatang. Idealnya, jadwal dan kebijakan yang akan memungkinkan bagi perusahaan untuk memenuhi permintaan dan pada saat yang sama meminimalkan total biaya produksi dan persediaan.
b. Seorang analis keuangan harus memilih portofolio investasi dari berbagai saham dan alternatif investasi obligasi. Seorang analis ingin menetapkan portofolio itu memaksimalkan laba atas investasi.
c. Seorang manajer pemasaran ingin menentukan cara terbaik untuk mengalokasikan anggaran tetap biaya iklan di antara media iklan alternatif seperti radio, televisi, koran, dan majalah. Manajer ingin menentukan kombinasi media yang dipakai dalam memaksimalkan efektivitas dari iklan yang akan dipilih.
d. Sebuah perusahaan memiliki gudang di sejumlah lokasi. Dengan adanya permintaan khusus dari pelanggan, perusahaan ingin menentukan berapa banyak masing-masing gudang akan mengirim ke setiap pelanggan sehingga total biaya transportasi dapat diminimalkan.

7.2. Masalah *Simple Maximization*

Untuk memahami pemecahan masalah *Simple Maximization* dapat dilihat studi kasus berikut ini:

RMC, Inc., merupakan perusahaan kecil yang memproduksi berbagai produk berbahan kimia. Dalam suatu proses produksi tertentu, ada tiga bahan baku digunakan untuk menghasilkan dua produk yaitu fuel additive dan solvent base. Produk fuel additive akan dijual kepada perusahaan minyak dan produk solvent base akan dijual kepada perusahaan kimia dan industri kebersihan. Untuk membuat 2 produk tersebut diperlukan 3 jenis bahan baku dengan jumlah yang berbeda-beda pada tiap produknya. Kebutuhan material bahan baku pada setiap produk dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 7.1. Kebutuhan material pada dua produk

	Product	
	Fuel Additive	Solvent Base
Material 1	0.4	0.5
Material 2		0.2
Material 3	0.6	0.3

0.6 tons of material 3 is used in each ton of fuel additive

Produksi RMC dibatasi oleh ketersediaan terbatas dari ketiga bahan baku. Untuk periode produksi saat ini, RMC telah menyediakan jumlah masing-masing bahan baku dalam jumlah berikut

Tabel 7.2. Ketersediaan maksimal material

Material	Amount Available for Production
Material 1	20 tons
Material 2	5 tons
Material 3	21 tons

Karena sifat material dapat mengalami pembusukan pada proses produksi, bahan material yang tidak digunakan produksi saat ini tidak berguna dan harus dibuang. Dari bagian departemen akuntansi menetapkan harga pada dua produk tersebut akan profit yaitu untuk produk fuel additive $40 dan solvent base $30. Maka kita dapat menentukan jumlah kedua produk dengan menggunakan program linear untuk menentukan profit yang maksimal.

Untuk menjawab permasalahan di atas dapat diikuti langkah berikut:

a. Formulasi masalah

Formulasi masalah adalah proses menerjemahkan pernyataan verbal dari suatu masalah menjadi pernyataan matematika. Pernyataan matematis dari masalah ini disebut sebagai model matematika. Kita harus memahami kasus tersebut agar dapat dibuat persamaan matematisnya.

Pada kasus RMC ingin menentukan berapa banyak masing-masing produk yang akan diproduksi untuk memaksimalkan kontribusi total terhadap laba. Jumlah ton tersedia untuk tiga bahan yang ada diperlukan untuk menghasilkan dua produk akan membatasi jumlah ton setiap produk yang bisa dihasilkan. Pemahaman yang baik dapat membuat langkah pertama dengan mengembangkan model matematika.

- Tuliskan Objective dari tujuan RMC untuk memaksimalkan kontribusi jumlah produk total terhadap laba (profit yang ingin dicapai)

- Tuliskan constaint dari ketiga material untuk membatasi jumlah ton untuk produk fuel additive dan solvent base yang dapat diproduksi

  Constraint 1: Jumlah ton dari material 1 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 20 ton
  Constraint 2: Jumlah ton dari material 2 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 5 ton.
  Constraint 3: Jumlah ton dari material 3 yang digunakan harus lebih kecil atau sama dengan 21 ton

- Tentukan Variabel Keputusan Variabel keputusan adalah input yang dapat dikontrol pada masalah.
- Untuk masalah RMC, kedua variabel keputusan tersebut adalah (1) jumlah ton fuel additiv yang diproduksi, dan (2) jumlah ton solvent base yang diproduksi. Dalam mengembangkan model matematika untuk masalah RMC, kita akan menggunakan notasi berikut untuk variabel keputusan:

  F jumlah ton dari fuel additive
  S jumlah ton dari solvent base

- Tuliskan objektiv untuk memaksimalkan profit pada kasus RMC's dengan harga $40 pada produk fuel additive dan $30 pada produk solvent base, maka persamaan total maximize seperti berikut:

  Kontribusi total profit $= 40F + 30S$

- Dari kontribusi total profit di atas kita dapat menuliskan persamaan maximize seperti berikut:

  Max $40F + 30S$

- Tuliskan constrain dari variabel keputusannya:

  Constraint 1:

  Jumlah ton dari material 1 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 1 yang tersedia

  Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

  Jumlah tons dari material 1 yang digunakan $= 0.4F + 0.5S$

  Dikarenakan jumlah material 1 yang tersedia = 20 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 1 adalah:

  $$0.4F + 0.5S \leq 20$$

Constraint 2:

Jumlah ton dari material 2 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 2 yang tersedia

Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

Jumlah tons dari material 2 yang digunakan = 0.2S

Dikarenakan jumlah material 2 yang tersedia = 5 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 2 adalah:

$$0.2S \leq 5$$

Constraint 3:

Jumlah ton dari material 3 yang digunakan $\leq$ Jumlah ton dari material 3 yang tersedia

Dari kasus di atas kita dapat menuliskan :

Jumlah tons dari material 3 yang digunakan = 0.6F + 0.3S

Dikarenakan jumlah material 1 yang tersedia = 21 ton yang dapat digunakan pada proses produksi, maka Pernyataan matematik pada constraint 3 adalah:

$$0.6F + 0.3S \leq 21$$

Tambahkan Constraint untuk masing-masing produk tidak negatif atau lebih besar dari nol seperti berikut ini:

$$F \geq 0 \text{ and } S \geq 0$$

Untuk menuliskan constrain tersebut, maka pernyataan matematiknya dapat ditulis seperti berikut:

$$F, S \geq 0$$

Pada masalah RMC, kita dapat menuliskan model matematik dengan formulasi masalahnya secara lengkap seperti berikut:

Model Matematik untuk masalah RMC :

$$\begin{array}{ll}
\text{Max } 40F + 30S & \\
\text{Subject to (s.t.)} & \\
\quad 0.4F + 0.5S \leq 20 & \text{Material 1} \\
\quad \quad 0.2S \leq 5 & \text{Material 2} \\
\quad 0.6F + 0.3S \leq 21 & \text{Material 3} \\
\quad F, S \geq 0 &
\end{array}$$

Dari model matematik di atas kita dapat mencari solusinya dengan menghitung berapa jumlah F dan jumlah S dengan menggunakan persamaan matematik.

7.3. Metode Solusi Grafik

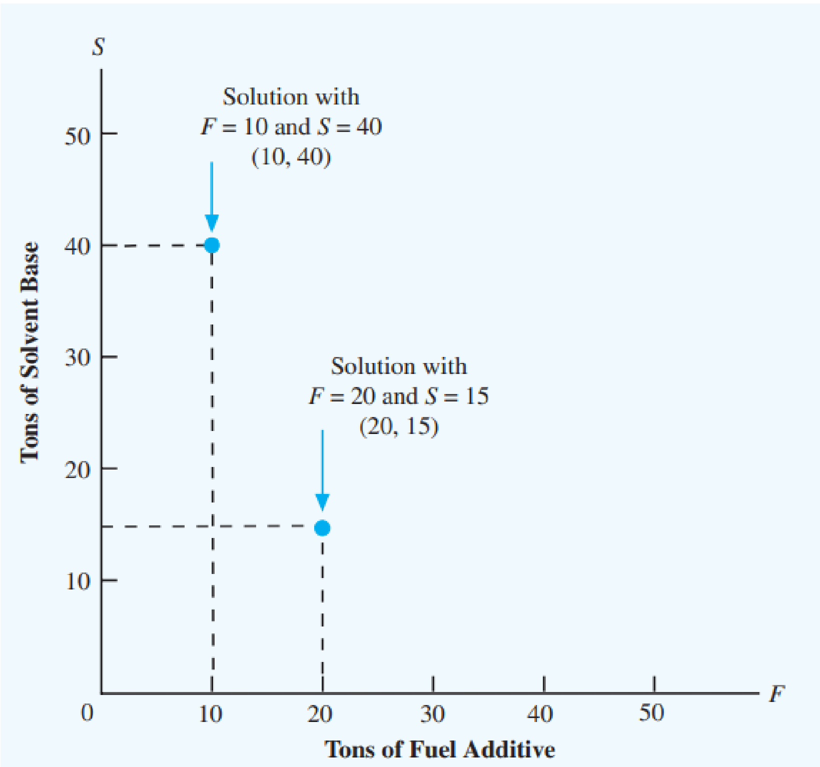
Masalah pemrograman linier yang menggunakan dua variabel keputusan dapat diselesaikan dengan menggunakan prosedur solusi grafik. Kita mulai dengan cara menggambarkan dari setiap persamaan nilai dari variabel F dan variabel S dengan F sebagai variabel pada garis horizontal X dan S pada garis vertical Y. Nilai dari variabel F dan adalah tidak negatif maka dapat dinyatakan bahwa variabel $F \geq 0$ dan variabel $S \geq 0$.

Sebelumnya kita telah menentukan persamaan untuk constrain material 1 adalah:

$$0.4F + 0.5S \leq 20$$

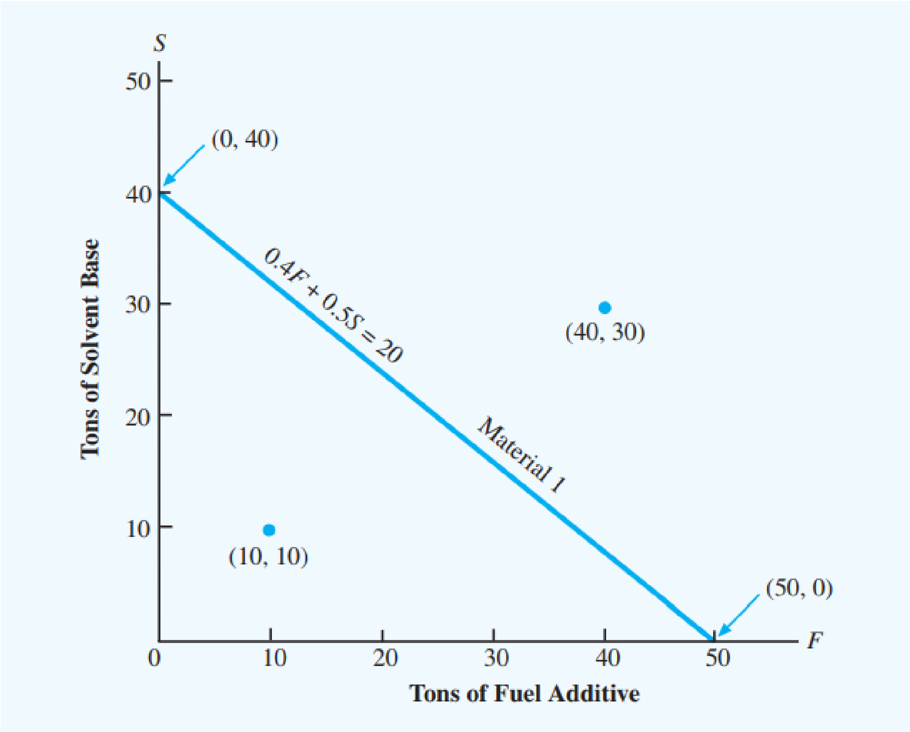
Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.4F + 0.5S = 20$$



Gambar 7.1. Grafik menggambarkan persamaan material 1

Kemudian kita gambar garisnya yang menunjukkan persamaan pada materail 1 seperti berikut ini:



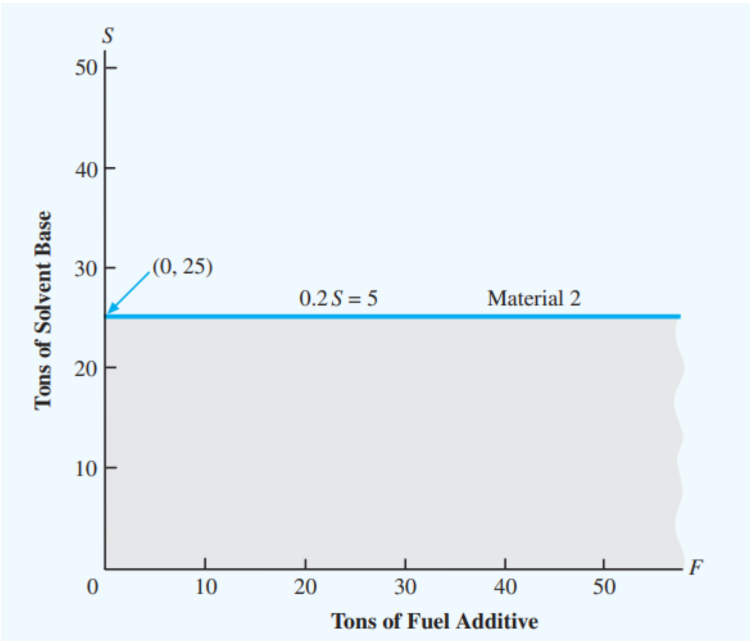
Gambar 7.2. Grafik menggambarkan garis persamaan material 1

Kemudian kita dapat menentukan persamaan untuk constrain material 2 adalah:

$$0.2S \leq 5$$

Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.2S \leq 5$$



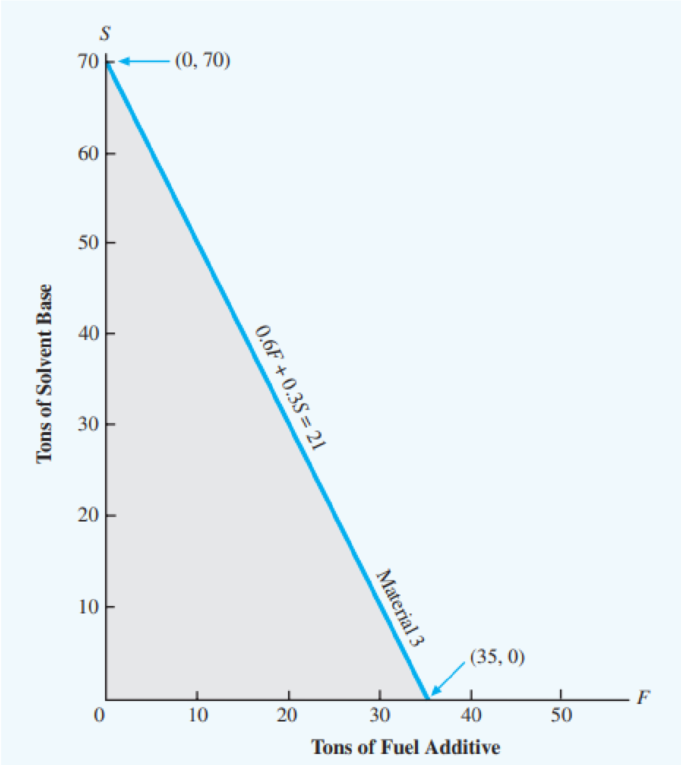
Gambar 7.3. Grafik menggambarkan persamaan material 2

Selanjutya kita telah menentukan persamaan untuk constrain material 3 adalah:

$$0.6F + 0.3S \leq 21$$

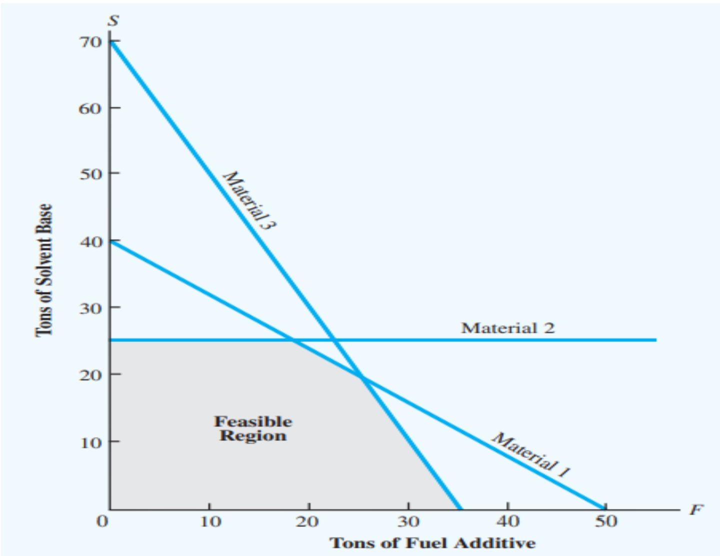
Untuk menuliskan solusi dari hubungan ini, kita mulai dengan menggambar garis yang sesuai dengan persamaan berikut:

$$0.6F + 0.3S = 21$$



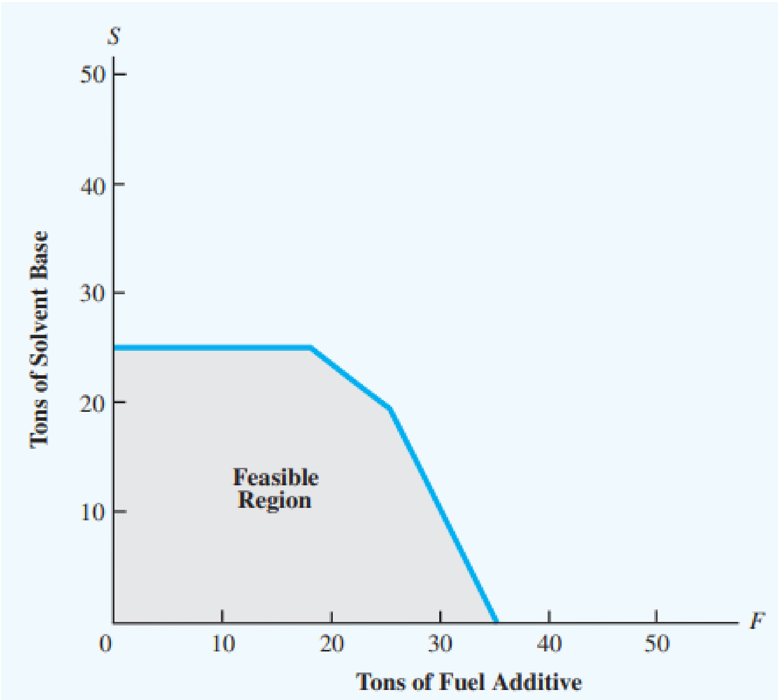
Gambar 7.4. Grafik menggambarkan persamaan material 3

Hasil dari ketiga grafik solusi diatas dapat kita gabungkan seperti gambar berikut ini:



Gambar 7.5. Grafik menggambarkan garis 3 persamaan

Dari grafik di atas kita dapat menggambarkan titik-titik persimpangannya seperti berikut:

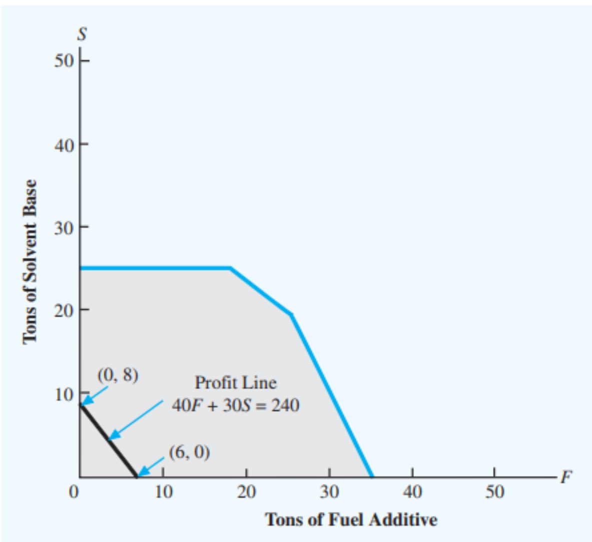


Gambar 7.6. Grafik menggambarkan titik yang posible

Untuk menentukan titik mana yang paling optimal, kita dapat menggambarkan garis persamaan maximize dengan asumsi total kita tentukan sendiri agar dapat menggambarkan garis dari persamaan maximize dengan persamaannya seperti berikut:

$$40F + 30S = 240$$

Dari persamaan tersebut dapat kita lihat gambarnya seperti berikut:

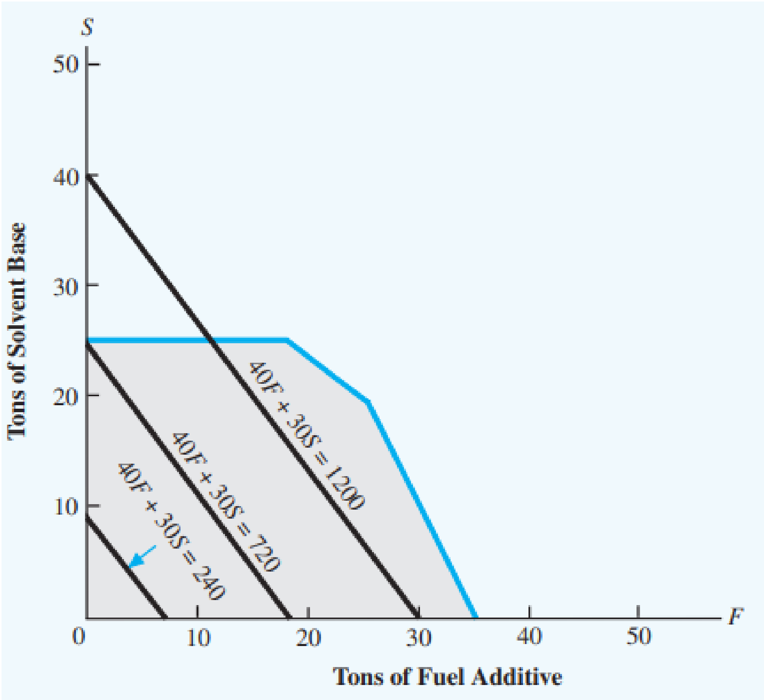


Gambar 7.7. Grafik menggambarkan garis persamaan maximize

Kita dapat mencari garis maximize yang yang lebih besar agar dapat menampilkan garis yang mendekati titik dari optimalnya. Persamaaannya seperti berikut:

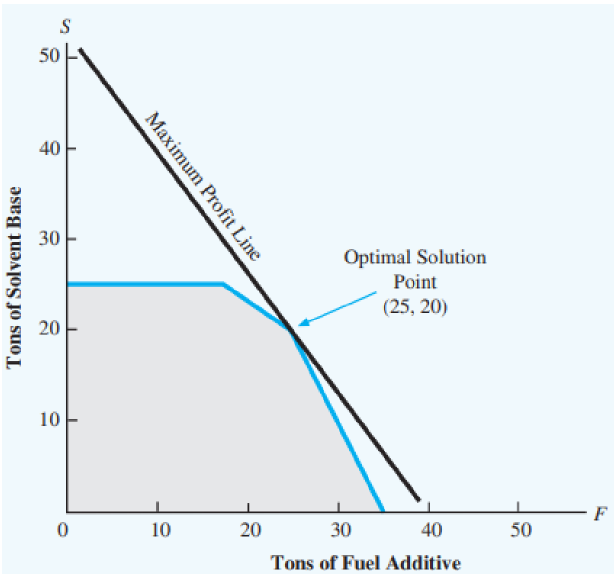
$$40F + 30S = 720$$
$$40F + 30S = 1200$$

Dari persamaan tersebut dapat kita lihat gambarnya seperti berikut:



Gambar 7.8. Grafik menggambarkan 3 garis persamaan maximize

Kita dapat menggeser garis maximize tersebut sesuai dengan kemiringan yang sama, maka hasilnya dapat kita lihat seperti gambar berikut:



Gambar 7.9. Grafik menggambarkan 3 garis persamaan maximize

Hasil dari gambar di atas, kita dapat menemukan solusi untuk masalah kasus ini adalah pertemuan antara persamaan material 1 dan persamaan material 3. Kita dapat mencari berapa jumlah untuk F dan S seperti berikut:

$$0.4F + 0.5S = 20 \quad \text{material 1}$$

Dan persamaan

$$0.6F + 0.3S = 21 \quad \text{material 3}$$

Dari kedua persamaan tersebut kita dapat mencari besar nilai F dan nilai S dengan cara subtitusi atau eliminasi. Untuk cara subtitusi dapat kita lakukan seperti berikut:

Pada persamaan material 1 :

$$\begin{aligned} 0.4F &= 20 - 0.5S \\ F &= \frac{20 - 0.5S}{0.4} \\ F &= 50 - 1.25S \end{aligned}$$

Hasil dari persamaan tersebut kita subtitusikan pada persamaan kedua dengan hasil seperti berikut:

$$\begin{aligned} 0.6(50 - 1.25S) + 0.3S &= 21 \\ 30 - 0.75S + 0.3S &= 21 \\ -0.45S &= -9 \\ S &= 20 \end{aligned}$$

Setelah nilai dari S didapat, kita dapat memasukkan hasilnya pada persamaan pertama seperti berikut:

$$\begin{aligned} F &= 50 - 1.25(20) \\ &= 50 – 25 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Setelah nilai dari variabel F dan variabel S didapat, kita dapat memasukkan nilai tersebut pada Persamaan maximize untuk mendapatkan nilai objektivnya dari tujuan persamaannya untuk mendapatkan total profit yang maksimal seperti berikut:

$$\text{Max} \rightarrow \quad 40(25) + 30(20) = \$1600$$

Hasil dari perhitungan maximize tersebut menyatakan bahwa hasil profit dari penjualan kedua produk fuel additive dan solvent base sebesar $1600.

7.4. Penentuan *Slack Variables*

Selain solusi optimal dan kontribusi laba terkait, para manajer RMC akan menginginkan informasi tentang persyaratan produksi untuk tiga bahan. Kita dapat tentukan informasi ini dengan mensubstitusi nilai solusi optimal (F = 25, S= 20) ke pada program linier. Hasil dari perhitungan memasukkan jumlah produk F sebesar 25 dan jumlah produk S sebesar 20 pada masing-masing persamaan material 1 , material 2 dan material 3, hasilnya dapat dilihat seperti tabel berikut ini:

Tabel 7.3. Hasil total material yang terpakai

Constraint	Tons Required for $F = 25, S = 20$ Tons	Tons Available	Unused Tons
Material 1	$0.4(25) + 0.5(20) = 20$	20	0
Material 2	$0.2(20) = 4$	5	1
Material 3	$0.6(25) + 0.3(20) = 21$	21	0

Hasil dari tabel di atas dapat kita lihat bahwa, solusi optimal dari persamaan yang telah kita cari untuk menentukan jumlah produksi sebanyak 25 ton produk fuel additive dan produk solvent sebesar 20 ton yang membutuhkan bahan baku material 1, material 2 dan material 3 yang tesedia. Hasilnya ternyata untuk material 1 dan material 3 habis, tetapi untuk material 2 masih tersisa 1 ton yang tidak terpakai. 1 ton material 2 yang tidak terpakai ini disebut slack atau disebut juga variabel slack (S). Slack ini dapat didefinisikan untuk masing-masing kebutuhan materialnya. Dikarenakan material pada kasus ini ada tiga material yang dibutuhkan dalam pembuatan dua produk fuel additive dan solvent base, maka slack yang ditambahkan menjadi 3 yaitu S_1, S_2 dan S_3. Untuk intu model persamaan matematiknya dapat ditulis seperti berikut ini:

$$\text{Max } 40F + 30S + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Subject to (s.t.)

$$0.4F + 0.5S = 20$$
$$0.2S = 5$$
$$0.6F + 0.3S = 21$$
$$F, S, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Dari kasus ini, maka hasil yang paling optimal untuk kasus tersebut dengan jumlah nilai dari variabel F = 25 dan nilai variabel S = 20, maka untuk variabel slack nya adalah:

Tabel 7.4. Hasil variabel slack

Constraint	Value of Slack Variable
Material 1	$S_1 = 0$
Material 2	$S_2 = 1$
Material 3	$S_3 = 0$

7.5. Studi Kasus Optimasi pada Produk Reiser Sports

Reiser Sports Products ingin menentukan jumlah bola kaki All-Pro (A) dan College (C) yang akan diproduksi untuk memaksimalkan laba selama cakrawala perencanaan empat minggu ke depan.
Constraint dari produksi produk dibatasi dengan kapasitas produksi pada tiga departemen yaitu:
1.cutting dan dyeing,
2.sewing, dan
3.inspection dan packaging.

Selama empat periode produksi, waktu yang tersedia untuk masing-masing departemen adalah sebagai berikut:

1. Departemen cutting dan dyeing selama 340 jam
2. Departemen sewing selama 420 jam
3. Departemen inspection dan packaging selama 200 jam.

Harga agar dapat profit untuk kedua produk tersebut adalah $5 untuk All-Pro (A) dan $4 untuk produk College (C) perunitnya. Model persamaan linier untuk kasus tersebut dapat dilihat di bawah ini:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & 5A + 4C & & \\
\text{s.t.} & & & \\
 & 12A + 6C & \leq 340 & \text{Cutting dan dyeing} \\
 & 9A + 15C & \leq 420 & \text{Sewing} \\
 & 6A + 6C & \leq 200 & \text{Inpection dan packaging} \\
 & A,C & \geq 0 &
\end{array}
$$

Tugas

Berdasarkan studi kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!
a. Tentukan nilai dari variabel A dan C untuk menentukan solusi yang maksimal!
b. Gambarkan solusi grafiknya pada masing-maisng waktu yang dibutuhkan oleh masing-masing departemen?
c. Berapa total profit yang maksimal yang didapat?
d. Hitunglah slack dari kasus tersebut?
e. Tulislah model persamaan matematiknya dengan penambahan slack nya!

Modul Kuliah ke 8

TPK

Penjadwalan Proyek

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep Penjadwalan Proyek
2. Memahami penjadwalan dengan waktu yang diharapkan
3. Memahami penjadwalan dengan waktu yang tidak pasti
4. Membuat penjadwalan dengan waktu diharapkan dan yang tidak pasti

8.1. Konsep Penjadwalan Proyek

Dalam banyak situasi, manajer bertanggung jawab atas perencanaan, penjadwalan, dan pengendalian proyek yang terdiri dari berbagai pekerjaan atau tugas terpisah yang dilakukan oleh berbagai departemen dan individu.

Seringkali proyek-proyek ini begitu besar atau kompleks sehingga manajer tidak mungkin mengingat semua informasi yang berkaitan dengan rencana, jadwal, dan kemajuan proyek.

Dalam situasi ini teknik evaluasi dan peninjauan program (PERT) dan metode jalur kritis (CPM) telah terbukti sangat berguna. PERT dan CPM dapat digunakan untuk merencanakan, menjadwalkan, dan mengendalikan berbagai proyek:

1. Penelitian dan pengembangan produk baru dan proses
2. Konstruksi pabrik, bangunan, dan jalan raya
3. Pemeliharaan peralatan besar dan kompleks
4. Desain dan pemasangan sistem baru

Dalam jenis proyek ini, manajer proyek harus menjadwalkan dan mengoordinasikan berbagai pekerjaan atau kegiatan sehingga seluruh proyek selesai tepat waktu.

Faktor yang menyulitkan dalam melaksanakan tugas ini adalah saling ketergantungan kegiatan; misalnya, beberapa kegiatan bergantung pada penyelesaian kegiatan lain sebelum pekerjaan itu dapat dimulai.

Karena proyek mungkin memiliki banyak ribuan kegiatan, manajer proyek mencari prosedur yang akan dilakukan untuk membantu mereka menjawab pertanyaan seperti berikut:

1. Berapa total waktu untuk menyelesaikan proyek?
2. kapan tanggal mulai dan selesai yang dijadwalkan untuk setiap kegiatan tertentu
3. Kegiatan mana yang kritikal dan harus diselesaikan sesuai dengan yang dijadwalkan agar proyek sesuai jadwal.
4. Berapa lama kegiatan yang tidak kritikal dapat ditunda sebelum menyebabkan penambahan
5. total waktu penyelesaian proyek

Model CPM dan PERT dapat memberikan bantuan dalam menjawab pertanyaan tersebut.

Meskipun PERT dan CPM memiliki tujuan umum yang sama dan menggunakan banyak hal yang sama terminologi, tetapi tekniknya dikembangkan secara sendiri-sendiri. PERT dikembangkan pada akhir 1950 oleh Angkatan Laut khusus untuk proyek rudal Polaris. Banyak aktivitas terkait dengan proyek ini yang belum pernah dicoba sebelumnya, sehingga PERT dikembangkan untuk menangani waktu aktivitas yang tidak pasti. CPM awalnya dikembangkan oleh DuPont dan Remington Rand terutama untuk proyek-proyek industri yang waktu kegiatannya pasti dan variabilitasnya bukan masalah. CPM menawarkan pilihan untuk mengurangi waktu aktivitas dengan menambah lebih banyak pekerja atau sumber daya, biasanya dengan biaya yang meningkat. Dengan demikian, fitur pembeda dari CPM adalah bahwa ia mengidentifikasi pertukaran antara waktu dan biaya untuk berbagai kegiatan proyek. Penjadwalan PERT dan CPM yang terkomputerisasi saat ini dengan pendekatan menggabungkan fitur yang terbaik dari keduanya.

8.2. Penjadwalan Proyek Berdasarkan Waktu Kegiatan yang Diharapkan

Untuk memahami penjadwalan proyek ini dengan waktu aktivitas yang diharapkan selesai dalam waktu tertentu dapat kita lihat ilustrasikan pada contoh berikut:

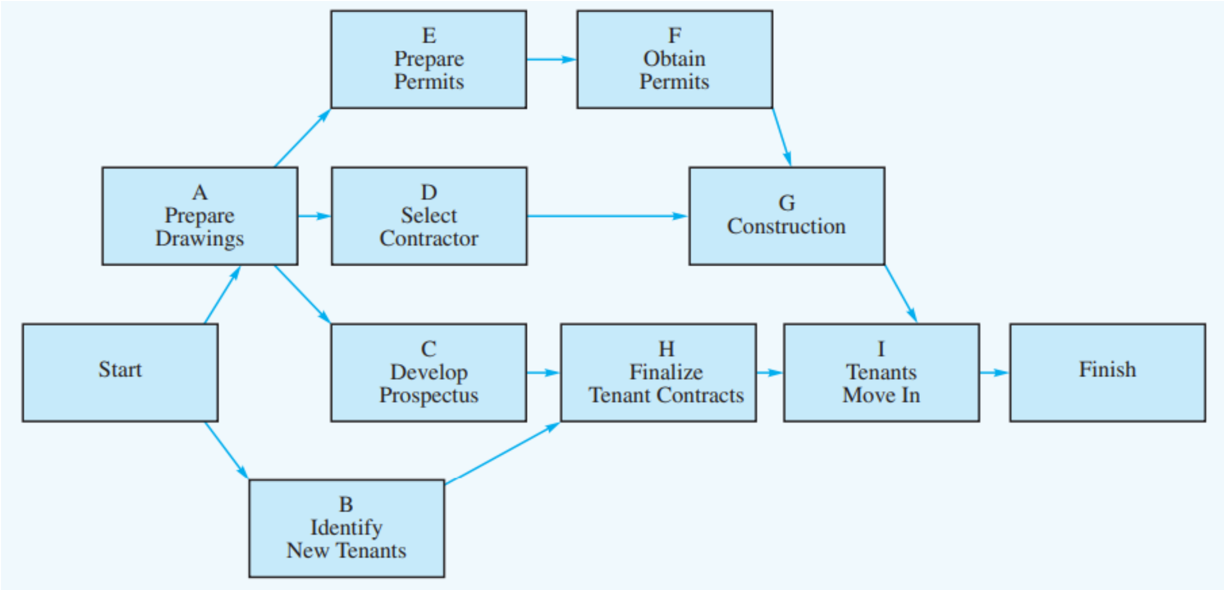
Contoh kasus 1

Pemilik Western Hills Shopping Center berencana untuk memodernisasi dan memperluas kompleks pusat perbelanjaan 32-bisnis saat ini. Proyek ini diharapkan menyediakan ruang untuk 8 hingga 10 bisnis baru. Pendanaan telah diatur melalui investor swasta. Yang belum ditangani adalah pemilik pusat perbelanjaan harus merencanakan, menjadwalkan, dan menyelesaikan ekspansi proyek tersebut. List aktivitas proyek tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 8.1. List Aktivitas Proyek Western Hills Shopping Center

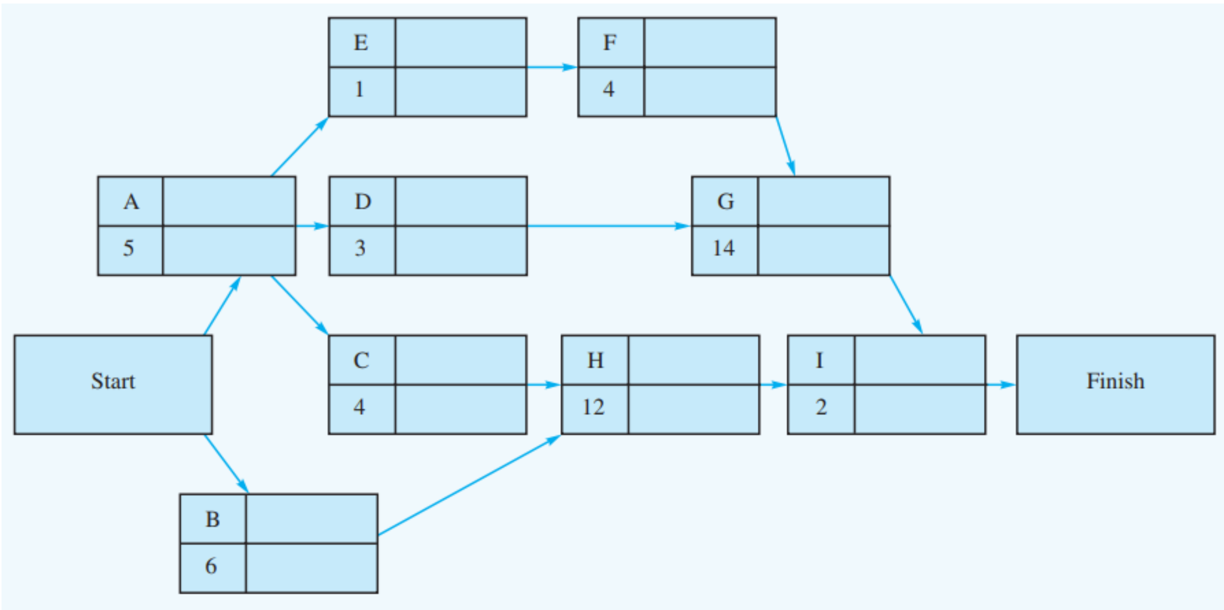
Activity	Activity Description	Immediate Predecessor	Expected Activity Time
A	Prepare architectural drawings	-	5
B	Identify potential new tenants	-	6
C	Develop prospectus for tenants	A	4
D	Select contractor	A	3
E	Prepare building permits	A	1
F	Obtain approval for building permits	E	4
G	Perform construction	D,F	14
H	Finalize contracts with tenants	B,C	12
I	Tenants move in	G,H	2
Total			51

Dari list kegiatan di atas kita akan menggambarkan alur prosesnya dengan melihat aktivitas sebelumnya (predecessor). Apabila aktivitas sebelumnya tidak ada, berarti aktivitas tersebut merupakan aktivitas awal yang harus diselesaikan terlebih dahulu. Untuk menggambarkan aktivitas jaringan proyek tersebut menggunakan CPM yang dimulai dengan Start dan diakhiri dengan Finish, hasilnya dapat dilihat pada gambar berikut:



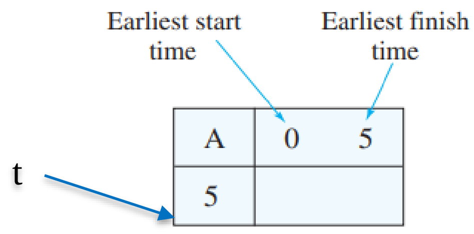
Gambar 8.1. Penjadwalan aktivitas jaringan proyek dengan CPM/PERT

Setelah penjadwalan aktivitas jaringan proyek digambarkan, kemudian kita bagi dari masing-masing gambar aktivitas untuk menuliskan durasi dari masing-masing aktivitasnya. Hasil tampilan gambarnya dapat dilihat seperti di bawah ini:



Gambar 8.2. Penjadwalan aktivitas jaringan proyek dengan waktu

Dari gambar di atas, kita dapat menghitung durasi waktu dengan pada masing-masing aktivitas yang kemudian dikompilasi mulai durasi waktu dari awal sampai akhir dari aktivitas. Pada bagian atas masing-masing aktivitas dibagi menjadi dua bagian untuk menunjukkan waktu paling awal bisa dimulai (*earliest start time*) dan waktu paling awal bisa selesai (*latest start time*) yang hasilnya dengan menambahkan waktu dari aktivitas. Gambarnya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



$$EF = ES + t$$

$$5 = 0 + 5$$

Dimana :

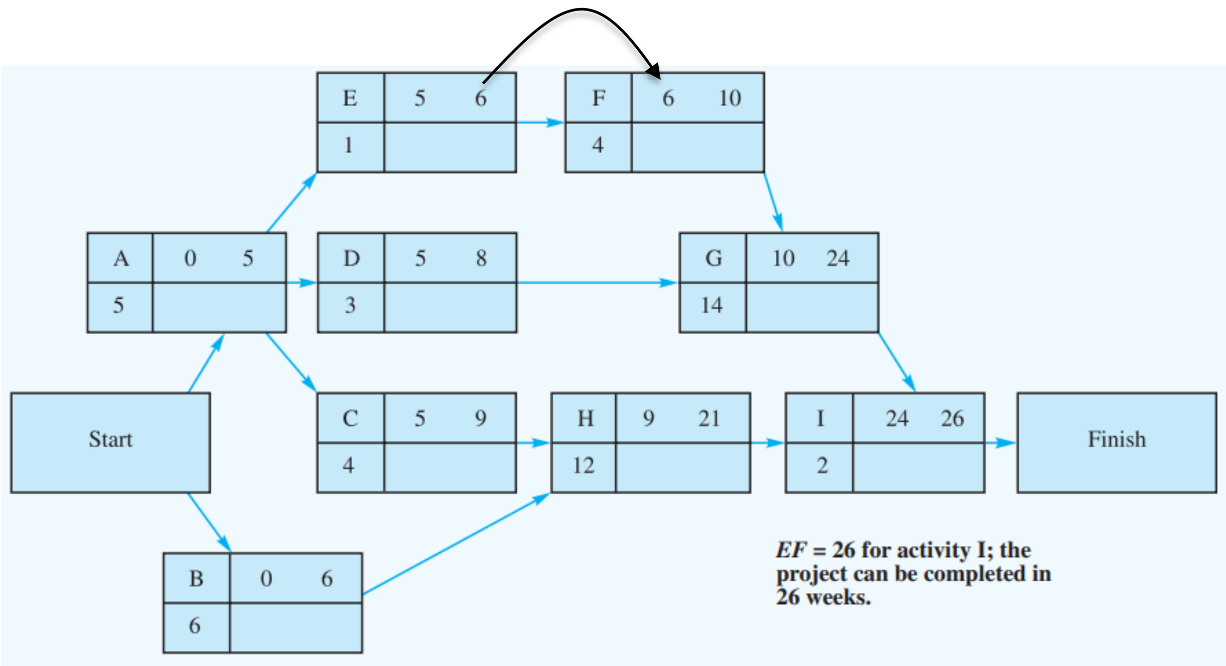
ES = earliest start time for an activity

EF = earliest finish time for an activity

t = expected activity time

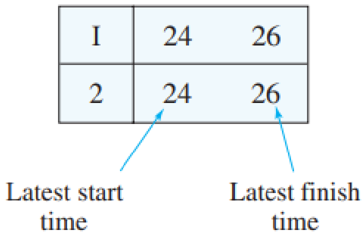
Hasil nilai dari EF akan disimpan atau dituliskan menjadi nilai ES pada aktivitas setelahnya, agar dapat ditambahkan dengan durasi waktu pada aktivitas tersebut. Apabila pada satu aktivitas dengan aktivitas sebelumnya ada dua atau lebih aktivitas, maka nilai yang diambil untuk ES pada aktivitas tersebut adalah nilai dari EF yang terbesar dari dua atau lebih aktivitas sebelumnya, karena aktivitas tersebut dapat dimulai pengerjaannya apabila semua aktivitas sebelumnya sudah selesai dikerjakan.

Selanjutnya kita akan menggambarkan semua aktivitas dengan durasi yang sudah ditambahkan dan ini dapat disebut alur maju (*forward pass*). Hasil dari penambahan pada alur maju (*forward pass*). dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 8.3. Penjadwalan aktivitas *forward pass*

Selanjutnya pada bagian bawah masing-masing aktivitas dibagi menjadi dua bagian juga untuk menunjukkan waktu paling lambat bisa dimulai (*latest start time*) dan waktu paling lambat bisa selesai (*latest finish time*) yang hasilnya dengan mengurangkan waktu dari aktivitas yang dimulai dari akhir aktivitas sampai awal aktivitas. Gambarnya dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



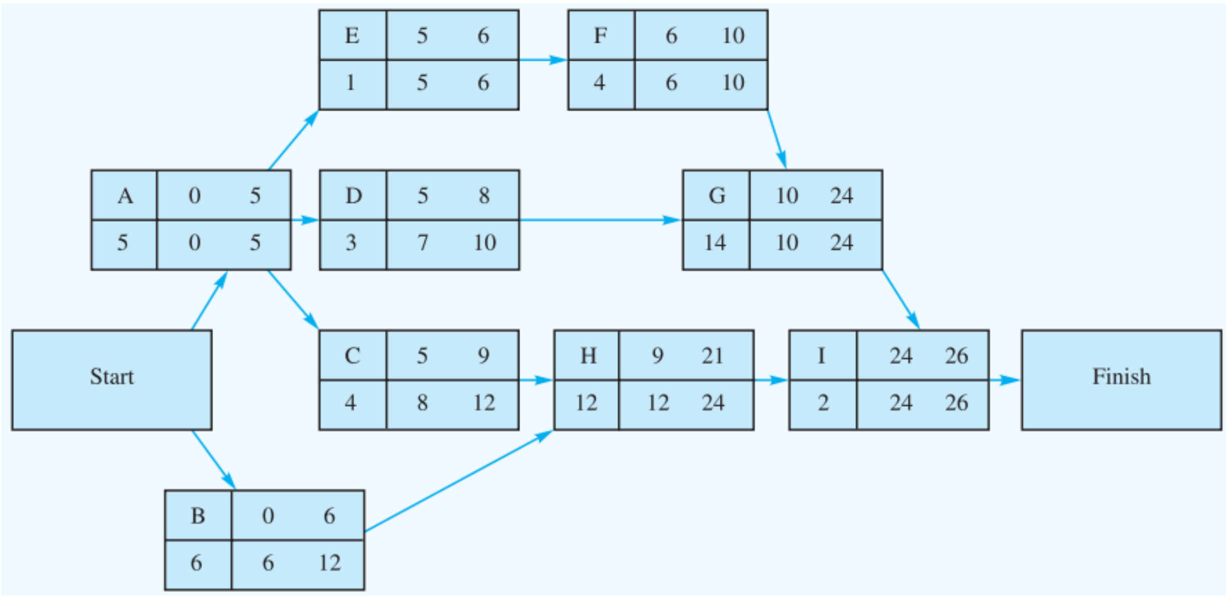
$$LS = LF - t$$
$$24 = 26 - 2$$

Dimana :

LS = latest start time for an activity
LF = latest finish time for an activity
t = expected activity time

Hasil nilai dari LF akan disimpan atau dituliskan menjadi nilai LS pada aktivitas sebelumnya, agar dapat dikurangkan dengan durasi waktu pada aktivitas tersebut. Apabila pada satu aktivitas dengan aktivitas sesudahnya ada dua atau lebih aktivitas, maka nilai yang diambil untuk LS pada aktivitas tersebut adalah nilai dari LF yang terkecil dari dua atau lebih aktivitas setelahnu\ya, karena aktivitas tersebut harus selesai paling cepat selesai.

Selanjutnya kita akan menggambarkan semua aktivitas dengan durasi yang sudah dikurangkan dan ini dapat disebut alur mundur (*backward pass).* Hasil dari pengurangan pada alur mundur (*backward pass).* dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 8.4. Penjadwalan aktivitas *backward pass*

Setelah menyelesaikan gambar penjadwalan proyek baik *forward pass* dan *backward pass*, selanjutnya dapat menentukan jumlah slack dari setiap aktivitas. Slack adalah lamanya waktu suatu kegiatan yang dapat ditunda tanpa menambah waktu penyelesaian proyek. Jumlah slack untuk suatu aktivitas dihitung sebagai berikut:

$$\text{Slack} = \text{LS} - \text{ES} = \text{LF} - \text{EF}$$

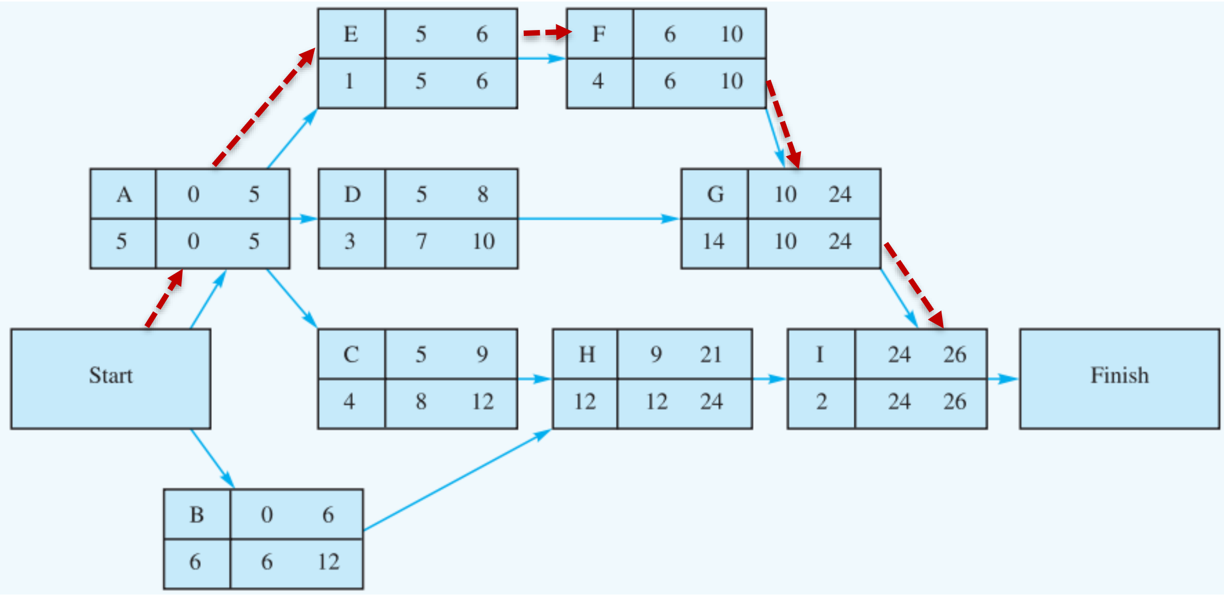
Hasil penghitungan slack pada masing-masing aktivitas dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 8.2. Slack Masing-masing aktivitas

Activity	Earliest Start (*ES*)	Latest Start (*LS*)	Earliest Finish (*EF*)	Latest Finish (*LF*)	Slack (*LS* − *ES*)	Critical Path?
A	0	0	5	5	0	Yes
B	0	6	6	12	6	
C	5	8	9	12	3	
D	5	7	8	10	2	
E	5	5	6	6	0	Yes
F	6	6	10	10	0	Yes
G	10	10	24	24	0	Yes
H	9	12	21	24	3	
I	24	24	26	26	0	Yes

Dari tabel slack di atas dapat ditentukan jalur kritikalnya dengan melihat hasil nilai slack dari masing-masing aktivitas yang bernilai = 0, maka aktivitas yang menjadi jalur kritis adalah dimulai dari aktivitas A-E-F-G-I.

Penentuan jalur kritis dapat juga ditentukan dengan melihat jalur yang nilai ES sama dengan nilai LS dan nilai EF sama dengan nilai LF. Jalur kritis pada proyek di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 8.5. Jalur Kritis Pada Penjadwalan Proyek

8.3. Penjadwalan Proyek Berdasarkan Waktu Kegiatan yang Tidak Pasti

Pada bahasan ini akan mempertimbangkan rincian penjadwalan proyek untuk masalah yang melibatkan penelitian dan pengembangan produk baru. Karena banyak kegiatan dalam proyek semacam itu tidak pernah dilakukan, manajer proyek ingin membuat penjadwalan kegiatan tersebut dengan waktu yang tidak pasti. Disini akan ditunjukkan bagaimana penjadwalan proyek dapat dilakukan dengan waktu aktivitas yang tidak pasti. Untuk membahas penjadwalan dengan waktu kegiatan yang tidak pasti, akan diilustrasikan pada contoh berikut ini.

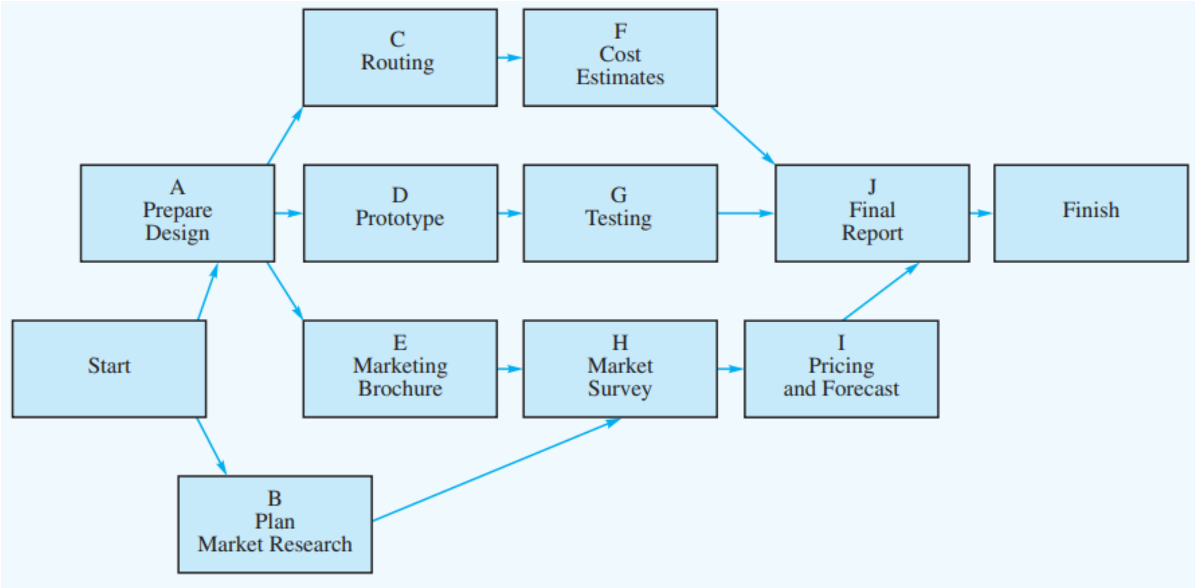
Contoh kasus 2

Perusahaan H. S. Daugherty telah memproduksi sistem pembersih vakum industri yang bertahu-tahun. Untuk perencanaan kedepan, anggota tim riset produk baru perusahaan mengajukan kepada perusahaan untuk mempertimbangkan pembuatan penyedot debu nirkabel. Produk baru ini diharapkan dapat berkontribusi pada ekspansi Daugherty ke dalam pasar rumah tangga. Manajemen berharap dapat memproduksi produk baru tersebut dengan biaya yang murah dan mendapatkan portabilitas serta kenyamanan tanpa kabel akan membuatnya sangat menarik. Manajemen Daugherty ingin mempelajari kelayakan pembuatan produk tersebut. Studi kelayakan akan memberikan rekomendasi tentang tindakan yang akan diambil. Untuk dapat menyelesaikan studi ini, informasi harus diperoleh dari penelitian dan pengembangan (R&D) perusahaan, pengujian produk, manufaktur, estimasi biaya, dan kelompok riset pasar. Langkah pertama dalam proses penjadwalan proyek adalah mengidentifikasi semua kegiatan secara detail pada proyek dan kemudian menentukan kegiatan pendahulu yang langsung untuk setiap kegiatan List aktivitas proyek tersebut dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 8.3. List Aktivitas Proyek H. S. Daugherty

Activity	Description	Immediate Predecessor
A	Develop product design	—
B	Plan market research	—
C	Prepare routing (manufacturing engineering)	A
D	Build prototype model	A
E	Prepare marketing brochure	A
F	Prepare cost estimates (industrial engineering)	C
G	Do preliminary product testing	D
H	Complete market survey	B, E
I	Prepare pricing and forecast report	H
J	Prepare final report	F, G, I

Dari list kegiatan di atas kita akan menggambarkan alur prosesnya dengan melihat aktivitas sebelumnya (predecessor). Apabila aktivitas sebelumnya tidak ada, berarti aktivitas tersebut merupakan aktivitas awal yang harus diselesaikan terlebih dahulu. Untuk menggambarkan aktivitas jaringan proyek tersebut menggunakan CPM/PERT yang dimulai dengan Start dan diakhiri dengan Finish, hasilnya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 8.6. Penjadwalan aktivitas jaringan proyek produk baru

Untuk waktu dari masing-masing kegiatan tidak diketahui secara pasti, sehingga dalam penentuan waktu aktivitas yang tidak pasti diperlakukan sebagai variabel acak dengan distribusi probabilitas terkait. Sebagai hasilnya, pernyataan probabilitas akan diberikan tentang kemampuan untuk memenuhi tanggal penyelesaian proyek tertentu.

Untuk memasukkan waktu aktivitas yang tidak pasti ke dalam analisis proyek, kita terlebih dahulu perlu memperoleh tiga waktu perkiraan untuk setiap aktivitas yaitu:

Optimistic time (a) = waktu aktivitas minimum jika semuanya berjalan secara ideal

Most probable time (m) = waktu aktivitas yang paling memungkinkan dalam kondisi normal

Pessimistic time (b) = waktu aktivitas maksimum jika ditemui penundaan yang signifikan

Untuk menentukan waktu pada masing-masing aktivitas dengan adanya tiga waktu yang berbeda-beda menjadi satu waktu (t), kita dapat menggunakan rumus berikut:

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Dimana:

t	=	Waktu aktivitas
a	=	Waktu Optimistic
m	=	Waktu Most probable
b	=	Waktu Pessimistic

Waktu dari setiap aktivitas pada proyek pembuatan produk vakum baru nirkabel dengan menampilkan waktu optimistic, waktu most probable, dan waktu pessimistic dapat dilihat pada tabel berikut ini:

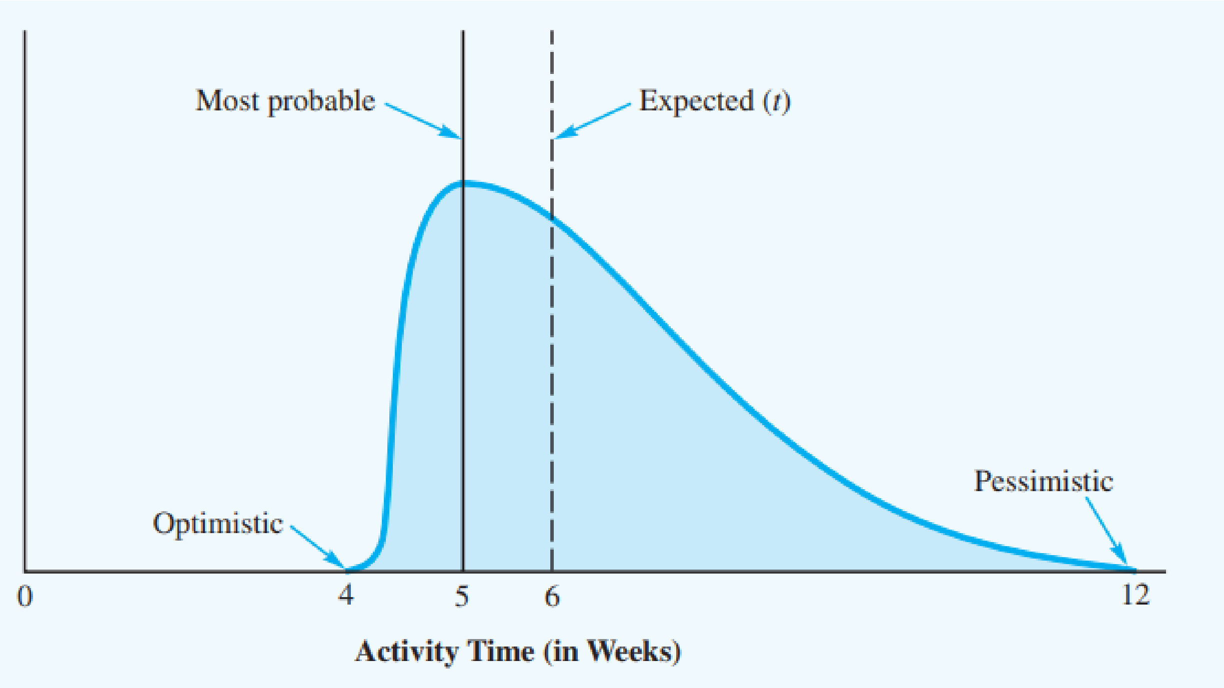
Tabel 8.4. Waktu Aktivitas Proyek H. S. Daugherty

Activity	Optimistic (*a*)	Most Probable (*m*)	Pessimistic (*b*)
A	4	5	12
B	1	1.5	5
C	2	3	4
D	3	4	11
E	2	3	4
F	1.5	2	2.5
G	1.5	3	4.5
H	2.5	3.5	7.5
I	1.5	2	2.5
J	1	2	3

Misalnya untuk mencari waktu aktivitas A adalah sebagai berikut:

$$t_A = \frac{4 + 4(5) + 12}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ weeks}$$

Untuk mengilustrasikan waktu aktivitas A dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 8.7. Waktu untuk Aktivitas A

Dengan waktu aktivitas yang tidak pasti, kita dapat menggunakan varian untuk menggambarkan dispersi atau variasi dalam nilai waktu aktivitas. Untuk mencari Varian dari aktivitas dapat menggunakan rumus berikut:

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Dimana:

σ	=	Varian aktivitas
a	=	Waktu Optimistic
b	=	Waktu Pessimistic

Misalnya untuk mencari varian aktivitas A adalah sebagai berikut:

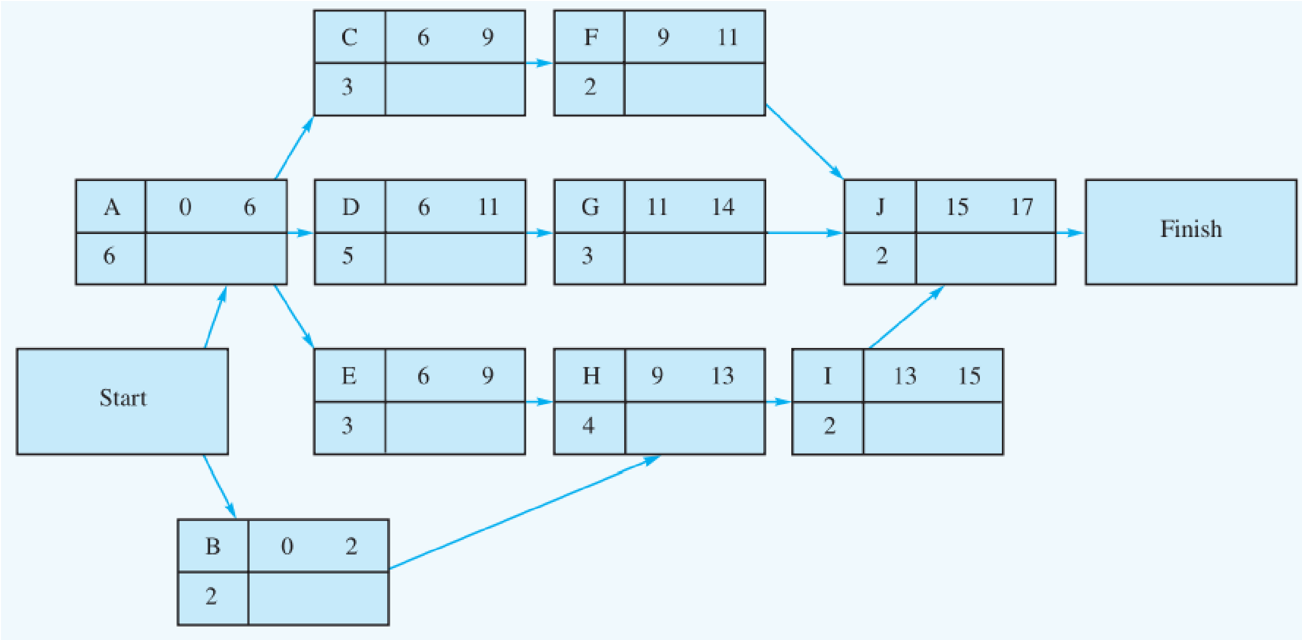
$$\sigma_A^2 = \left(\frac{12 - 4}{6}\right)^2 = \left(\frac{8}{6}\right)^2 = 1.78$$

Hasil perhitungan waktu dari setiap aktivitas dan varian setiap aktivitas dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 8.5. Waktu Aktivitas dan Varian Proyek H. S. Daugherty

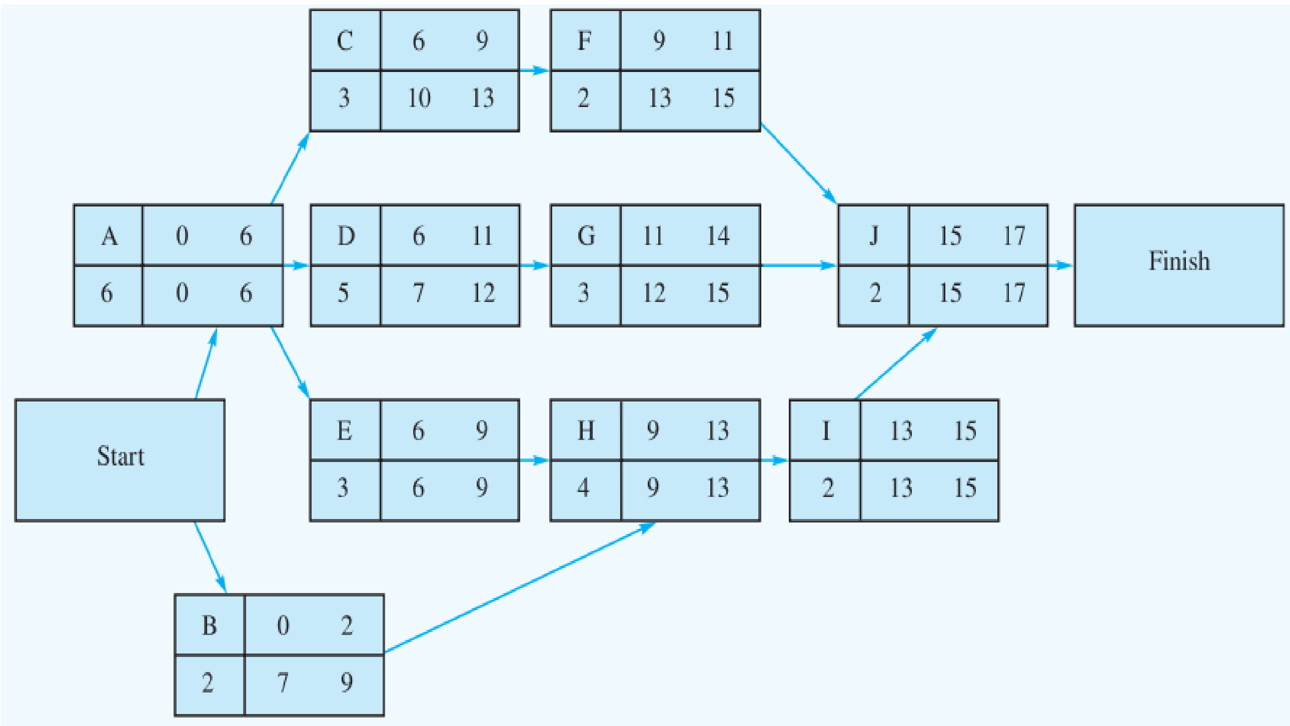
Activity	Expected Time (weeks)	Variance
A	6	1.78
B	2	0.44
C	3	0.11
D	5	1.78
E	3	0.11
F	2	0.03
G	3	0.25
H	4	0.69
I	2	0.03
J	2	0.11
Total	32	

Setelah waktu aktivitasnya dari tiga waktu perkiraan menjadi satu waktu aktivitas, maka kita dapat menggambarkan waktu pada setiap aktivitas pada alur maju (*forward pass)* jaringan proyeknya sesuai dengan predecessor aktivitas dan mengisi nilai dari ES dan EF dapat dilihat seperti gambar di bawah ini:



Gambar 8.8. Waktu untuk Aktivitas pada alur *forward pass*

Selanjutnya untuk menggambarkan setiap aktivitas pada alur mundur (*backward pass)* jaringan proyeknya sesuai dengan mengisi nilai dari LS dan LF dapat dilihat seperti gambar di bawah ini:



Gambar 8.9. Waktu untuk Aktivitas pada alur *backward pass*

Hasil penghitungan slack pada masing-masing aktivitas dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 8.6. Slack Aktivitas pada Proyek H. S. Daugherty

Activity	Earliest Start (*ES*)	Latest Start (*LS*)	Earliest Finish (*EF*)	Latest Finish (*LF*)	Slack (*LS* − *ES*)	Critical Path?
A	0	0	6	6	0	Yes
B	0	7	2	9	7	
C	6	10	9	13	4	
D	6	7	11	12	1	
E	6	6	9	9	0	Yes
F	9	13	11	15	4	
G	11	12	14	15	1	
H	9	9	13	13	0	Yes
I	13	13	15	15	0	Yes
J	15	15	17	17	0	Yes

Dari tabel slack di atas kita dapat mengetahui jalur kritisnya yaitu (A – E – H – I – J) dengan total waktu pengerjaan proyek tersebut rata-rata adalah 17 minggu hasil dari penjumlahan waktu pada jalur kritis seperti berikut:

$$E(T) = t_A + t_E + t_H + t_I + t_J$$

$$= 1{,}78 + 0{,}11 + 0{,}69 + 0{,}03 + 0{,}11$$

$$= 2{,}72$$

Varian proyek tersebut dalam waktu penyelesaian proyek adalah jumlah dari varian pada jalur aktivitas kritisnya dapat dihitung seperti berikut:

$$\sigma^2 = \sigma^2_A + \sigma^2_E + \sigma^2_H + \sigma^2_I + \sigma^2_J$$

$$= 6 + 3 + 4 + 2 + 2$$

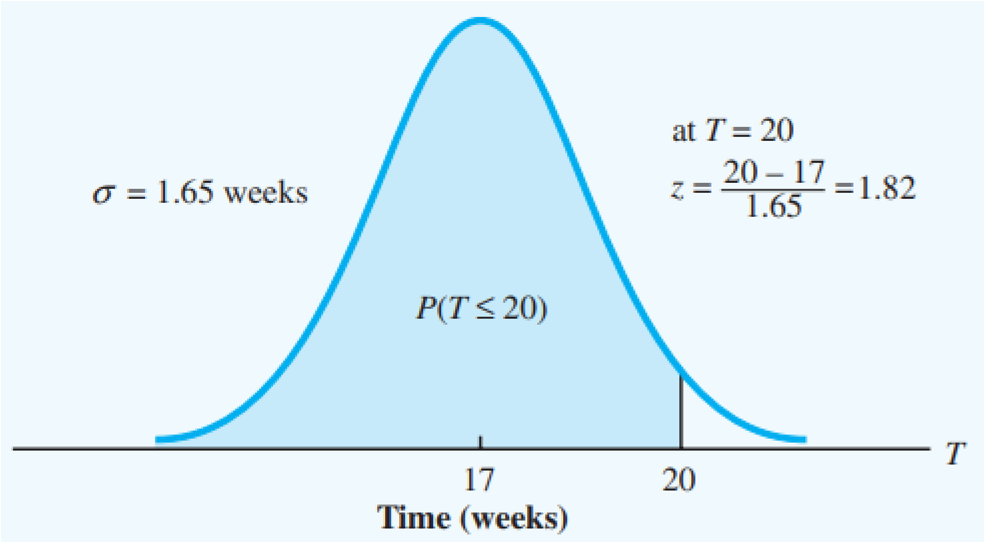
Dari hasil perhitungan varian di atas kita dapat mencari standar deviasinya yaitu:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2{,}72} = 1{,}65$$

Apabila pada pada proyek tersebut dapat selesai dalam 20 minggu, maka hitunglah berapa probabilitas proyek tersebut dapat selesai?

Jawab

Untuk menyelesaikan soal tersebut kita dapat menggunakan model distribusi normal dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 8.10. Distribusi Normal Aktivitas proyek

Kita dapat menghitung z seperti berikut:

$$z = \frac{20 - 17}{1.65} = 1.82$$

Dari hasil perhitungan z = 1,82, kita dapat menggunakan tabel distribusi normal untuk menentukan berapa probabilitas apabila proyek tersebut dapat diselesaikan diatas 20 minggu.

Hasil dari tabel diketahui luas area dari z = 1,82 adalah 0,9656, maka kita dapat mengetahui bahwa hasil probabilitas proyek dapat dikerjakan di atas 20 minggu adalah 1 - 0,9656 = 0,0344.

Jadi proyek penjadwalan produk baru dengan waktu diatas 20 minggu adalah 3,44%.

8.4. Studi Kasus Penjadwalan Proyek

Pada sebuah universitas, Senat Mahasiswa pada bagian Program dan Hiburan akan mengadakan kegiatan pameran sedang mempersiapkan untuk menjadi tuan rumah konser rock pertama pada kampusnya. Untuk berhasil menjalankan konser rock ini, telah membuat daftar kegiatan yang diperlukan. Informasi daftar kegiatan tersebut dapat dilihat pada tabel waktu kegiatan berikut dengan perkiraan waktu durasi diukur dalam hari:

Tabel 8.7. List Aktivitas Proyek

Activity	Immediate Predecessor(s)	Optimistic	Most Probable	Pessimistic
A: Negotiate contract with selected musicians	—	8	10	15
B: Reserve site	—	7	8	9
C: Manage travel logistics for music group	A	5	6	10
D: Screen & hire security personnel	B	3	3	3
E: Arrange advertising & ticketing	B, C	1	5	9
F: Hire parking staff	D	4	7	10
G: Arrange concession sales	E	3	8	10

Tugas

Berdasarkan studi kasus di atas, jawablah soal di bawah ini!

a. Hitunglah waktu dari masing-masing kegiatan!
b. Gambarkan alur jaringan penjadwalan proyek tersebut?
c. Buatlah tabel Slack proyek tersebut!
d. Tentukan Jalur kritisnya?
e. Berapa durasi waktu rata-rata proyek tersebut dapat selesai dan berapa varian jalur kritisnya?
f. Berapa probabilitas penjadwalan proyek tersebut dapat selesai diatas 30 hari?

Modul Kuliah ke 9

TPK

Model Inventory

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep model inventory
2. Memahami inventory model .
3. Membuat analisis model inventory

9.1. Konsep Model Inventory

Inventory merupakan tempat untuk menyimpan barang jadi atau bahan baku yang belum terpakai oleh suatu organisasi untuk digunakan di masa depan. Barang-barang yang disimpan sebagai persediaan yaitu bahan baku, suku cadang yang dibeli, komponen, subassemblies, barang dalam proses, barang jadi, dan persediaan. Dua alasan utama persediaan inventaris organisasi adalah:

1. Untuk mengambil keuntungan dari skala ekonomi yang ada akibatnya biaya tetap untuk memesan barang.
2. Untuk melindungi terhadap ketidakpastian dalam permintaan pelanggan atau gangguan pasokan.

Meskipun inventory memiliki peran penting dan esensial, namun biaya yang terkait dengan pembiayaan dan pemeliharaan persediaan adalah bagian yang substansial dalam melakukan bisnis. Dalam organisasi besar, biaya yang terkait dengan inventory dapat dapat menghabiskan jutaan dolar.

Dalam pelaksanaannya pengelolaan inventory, manajer harus menjawab dua pertanyaan penting.

1. Berapa banyak yang harus dipesan ketika inventaris diisi kembali?

2. Kapan persediaan harus diisi kembali?

Hampir setiap bisnis atau perusahaan menggunakan semacam model atau sistem manajemen persediaan menjawab pertanyaan-pertanyaan sebelumnya

9.2. Model *Economic Order Quantity* (EOQ)

Model Economic Order Quantity (EOQ) dapat dijalankan ketika permintaan untuk suatu barang dapat menunjukkan tingkat yang konstan, atau hampir konstan, dan ketika seluruh jumlah yang dipesan sebagai persediaan tiba pada satu titik waktu. Asumsi tingkat permintaan konstan berarti sama dengan jumlah unit yang diambil dari inventory setiap periode waktu seperti 5 unit setiap hari, 25 unit setiap minggu, 100 unit setiap periode empat minggu, dan seterusnya. Pengelolaan inventory memerlukan biaya dalam memelihara ketersediaan bahan baku atau barang jadi yang disimpan sebagai persediaan. Biaya yang diperlukan dalam mengelola inventory adalah:

a. Biaya penyimpanan (*Holding costs*)

Biaya penyimpanan adalah biaya yang terkait dengan pemeliharaan atau menentukan tingkat persediaan. Biaya ini tergantung pada ukuran persediaan. Biaya penyimpanan pertama yang harus dipertimbangkan adalah biaya pendanaan investasi persediaan. Ketika suatu perusahaan meminjam uang, ia dikenakan biaya bunga. Jika perusahaan menggunakan uangnya sendiri, ia mengalami biaya peluang yang terkait dengan tidak dapat menggunakan uang untuk investasi yang lain. Dalam kedua kasus, biaya bunga ada untuk modal yang terikat dalam persediaan. Biaya modal ini biasanya dinyatakan sebagai persentase dari jumlah yang diinvestasikan.

b. Biaya pemesanan (*Order cost*)

Biaya pemesanan yang dianggap tetaptidak terlepas dari jumlah pesanan, mencakup persiapan voucher, dan pemrosesan pesanan, termasuk pembayaran, pengiriman, telepon, transportasi, verifikasi faktur, penerimaan, dan sebagainya.

Pada industri dan bisnis dalam persentase tahunan, hampir semua model persediaan yang telah dikembangkan berdasarkan biaya tahunan.

Rumus untuk biaya persediaan tahunan per unit adalah:

$$C_h = IC$$

Dimana:

I = tingkat/ persentasi biaya penyimpanan tahunan

C = biaya per unit

C_h = biaya penyimpanan (*holding cost*) tahunan per unit

Rumus persamaan untuk menghitung biaya penyimpanan (holding cost) tahunan adalah:

$$\text{Annual holding cost} = (\text{Average inventory})\ (\text{Annual holding cost per unit}) = \frac{1}{2} Q C_h$$

Rumus persamaan untuk menghitung biaya pemesanan (ordering cost) tahunan adalah:

$$\text{Annual ordering cost} = (\text{Number of orders per tahun})\ (\text{Cost per order}) = \frac{D}{Q} C_o$$

Dari kedua rumus di atas kita dapat menentukan rumus total biaya tahunan adalah:

$$\text{Total annual cost} = \text{Annual holding cost} + \text{Annual ordering cost}$$

$$TC = \frac{1}{2} Q C_h + \frac{D}{Q} C_o$$

Dimana :

Q = Quantitas jumlah unit

C_h = biaya penyimpanan (*holding cost*) tahunan per unit

C_o = biaya pemesanan (*ordering cost*) tahunan per unit

D = Demand per tahun

Rumus untuk menentukan Q* Kuantitas minimal (optimal) adalah:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

Rumus untuk mencari titik harus melakukan pemesanan (reorder point) adalah:

r = dm

Dimana :

r = Reorder point

d = demand per hari

m = lead time (waktu tunggu pemesanan)

Untuk mencari cycle time yaitu jumlah berapa kali order dalam satu tahum dengan asumsi jumlah hari kerja per tahun adalah 250 hari:

$$T = \frac{250}{D/_{Q*}} = \frac{250\,Q*}{D}$$

Dimana :

T = cycle time

D = Demand per tahun

Q* = Kuantitas optimal

250 asumsi jumlah hari kerja dalam satu tahun

Contoh 1

Perusahaan Minuman R&B memiliki produk minuman ringan yang mempunyai tingkat permintaan tahunan secara konstan sebesar 104.000 kotak. Satu kotak minuman ringan berharga R&B $ 8. Biaya pemesanan adalah $ 32 per pesanan dan biaya penyimpanan adalah 25% dari nilai persediaan. R&B memiliki 250 hari kerja per tahun, dan waktu tunggu adalah 2 hari.

hitunglah aspek inventaris berikut:

a. Economic order quantity
b. Reorder point
c. Cycle time
d. Total annual cost

Jawaban
Untuk menjawab kasus di atas kita tuliskan terlebih dahulu apa yang diketahui dari soal tersebut seperti berikut:

Diketahui :
D = 104.000 kotak
C = $ 8
C_o = $ 32
I = 0,25
Hari kerja per tahunb = 250 hari
m = 2 hari

a. Untuk menghitung Q* (EOQ) adalah sebagai berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

$$Q* = \sqrt{\frac{2\ (104.000)\ (32)}{(0,25)(8)}}$$

$$Q* = 1824$$

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan jumlah kuantitas optimal adalah 1824 kotak

b. Untuk mencari Reorder Point adalah sebagai berikut:

d = D/250 = 104.000/250 = 416 kotak per hari

r = dm
r = 416 (2)
r = 832

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan jumlah harus melakukan order kembali setelah persediaan mencapai 832 kotak.

c. Untuk mencari Cycle time adalah sebagai berikut:

$$T = \frac{250\ Q*}{D}$$

$$T = \frac{250\ (1824)}{104.000} = 4,39$$

Dari hasil perhitungan di atas memperlihatkan waktu siklusnya selama 4,39 hari kerja

d. Untuk menghitung total biaya pertahun adalah sebagai berikut:

$$TC = \frac{1}{2} Q C_h + \frac{D}{Q} C_o$$

$$TC = \frac{1}{2}(1824)(0{,}25)(8) + \frac{(104.000)}{1824} 32$$

TC = 1824 + 1824,6

TC = 3648,6

Dari hasil perhitungan di atas dapat dilihat bahwa total biaya pertahun adalah $ 3648,6

9.3. Model *Economic Production Lot Size* (POQ)

Model produktion lot size dirancang dalam kondisi produksi dimana setelah pesanan yang ditempatkan, kemudian produksi dimulai dan jumlah yang konstan unit ditambahkan pada inventory setiap hari sampai proses produksi selesai.

Rumus untuk mencari maximum inventory adalah :

Maximum inventory = (p - d)/t

Dimana:

d = demand per hari
p = jumlah produksi per hari
t = jumlah hari untuk produksi berjalan

Rumus untuk mencari lamanya (length) produksi berjalan adalah :

$$t = \frac{Q}{p}\ hari \quad \text{atau} \quad t = \frac{Q}{P/(hari\ kerja\ setahun)}\ hari$$

Untuk mencari cycle time yaitu jumlah berapa kali order dalam satu tahum dengan asumsi jumlah hari kerja per tahun adalah 250 hari:

$$T = \frac{250}{D/_{Q*}} = \frac{250\ Q*}{D}$$

Dimana :

T = cycle time
D = Demand per tahun
Q* = Kuantitas optimal
250 asumsi jumlah hari kerja dalam satu tahun

Dari rumus di atas kita dapat mencari rumus maximum inventory :

$$Maximum\ inventory = (p-d)t = (p-d)(\tfrac{Q}{P})$$

$$= (1-\tfrac{d}{p})Q$$

Untuk mencari average inventory adalah:

$$Average\ inventory = \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{d}{p})Q$$

Untuk mencari biaya penyimpanan (holding cost) rumusnya:

Annual holding cost = (Average inventory) (Annual cost per unit)

$$= \frac{1}{2}(1-\frac{d}{p})QC_h$$

Untuk mencari biaya pemesanan/ setup (order cost) rumusnya:

Annual setup cost = (Number of produktion runs per year) (Setup cost per runs)

$$= \tfrac{D}{Q}C_o$$

Untuk menghitung total cost (TC) adalah:

$$TC = \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{d}{p}\right)QC_h + \tfrac{D}{Q}C_o$$

Untuk mencari demand per hari (d) dengan 250 hari kerja per tahun :

$$d = \frac{D}{250}$$

Untuk mencari produksi per hari (p) dengan 250 hari kerja per tahun :

$$p = \frac{\mathrm{P}}{250}$$

Dari persamaan di atas, maka:

$$\frac{d}{p} = \frac{\mathrm{D}/250}{\mathrm{P}/250} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{P}}$$

Oleh karena itu untuk menghitung total cost (TC) dapat menggunakan rumus berikut:

$$TC = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) QC_h + \frac{D}{Q} C_o$$

Dimana :
Q = Quantitas jumlah unit
C_h = biaya penyimpanan (*holding cost*) tahunan per unit
C_o = biaya pemesanan (*ordering cost*)/ setup mesin tahunan per unit
D = Demand per tahun

Untuk mencari jumlah kuantitas minimal optimal adalah sebagai berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{(1 - \frac{D}{P})C_h}}$$

Contoh 2

Beauty Bar Soap merupakan sebuah perusahaan yang memproduksi produk sabun yang memiliki kapasitas produksi tahunan 60.000 buah. Permintaan setiap tahunannya pada perusahaan ini diperkirakan sebesar 26.000 buah, dengan asumsi permintaan secara konstan sepanjang tahun. Pada pemasangan dan setup mesin pada lini produksi biayanya sekitar $ 135. Biaya pembuatan per kotak adalah $ 4,50, dan biaya penyimpanan tahunan diperkirakan sebesar 24%. Jumlah hari kerja 250 hari pertahun.

Dari kasus tersebut hitunglah:

a. Berapa ukuran lot produksi yang direkomendasikan?
b. Berapa Waktu siklus produksinya?
c. Berapa lamanya length produksi berjalan?
d. Berapa Total biaya tahunannya?

Jawaban

Untuk menjawab kasus di atas kita tuliskan terlebih dahulu apa yang diketahui dari soal tersebut seperti berikut:

Diketahui :
P = 60.000 buah
D = 26.000 buah
C = $ 4,5
C_o = $ 135
I = 0,24
Hari kerja per tahun = 250 hari

a. Untuk menghitung Q* (POQ) adalah sebagai berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{(1-\frac{D}{P})C_h}}$$

$$Q* = \sqrt{\frac{2(26.000)\ (135)}{(1-\frac{26.000}{60.000})(0,24)(4,5)}} \quad Q* = \sqrt{\frac{7.020.000}{0,612}}$$

$Q* = 3.386,8$ → dibulatkan

$Q* = 3.387$

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan jumlah kuantitas optimal adalah 3.387 buah

b. Untuk menghitung Waktu siklus adalah sebagai berikut:

$$T = \frac{250}{D/_{Q*}} = \frac{250\ Q*}{D}$$
$$T = \frac{250\ (3.387)}{26.000}$$
$$T = 32,5$$

Dari hasil perhitungan di atas memperlihatkan waktu siklusnya selama 32,5 hari kerja

c. Untuk menghitung lamanya *length* produksi berjalan adalah sebagai berikut:

$$t = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}/(hari\ kerja\ setahun)}\ \ hari$$

$$t = \frac{3.387}{60.000/250}\ \ hari$$

$$t = 14,1\ \ hari$$

Dari hasil perhitungan di atas memperlihatkan lamanya *length* produksi berjalan 14,1 hari.

d. Untuk menghitung Total biaya tahunannya adalah sebagai berikut:

$$TC = \frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)QC_h + \frac{D}{Q}C_o$$

$$TC = \frac{1}{2}\left(1-\frac{26.000}{60.000}\right)(3387)(0,24)(4,5) + \frac{26.000}{3387}135$$

$$TC = 1036,4 + 1036,3$$

$$TC = 2.072,7$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat dilihat bahwa total biaya pertahun adalah $ 2.072,7

9.4. Model Inventory Dengan *Planned Shortages*

Kekurangan atau kehabisan persediaan terjadi ketika permintaan melebihi jumlah persediaan yang ada. Untuk beberapa kondisi, kekurangan bahan baku tidak diinginkan dan harus dihindari jika memungkinkan. Model yang dikembangkan pada bahasan bagian ini memperhitungkan jenis kekurangan yang dikenal sebagai backorder (S)

Dalam situasi backorder, kami menganggap bahwa ketika pelanggan melakukan pemesanan dan menemukan bahwa pemasok kehabisan stok, pelanggan menunggu sampai pengiriman baru tiba, dan kemudian pesanan diisi.

Backorder (S) mengindikasikan jumlah backorder itu telah terakumulasi pada saat pengiriman pada jumlah kuantitas (Q) diterima, maka sistem persediaan untuk kasus pesanan ulang memiliki karakteristik sebagai berikut:

1. Jika S backorder ada ketika pengiriman pada ukuran kuantitas Q datang, maka (S) backorder dikirimkan ke pelanggan yang sesuai, maka Q dikurangi S unit yang tersisa ditempatkan diinventory, maka untuk mencari maximu inventory adalah:

   Maximum inventory = Q - S

2. Inventory cycle dari T hari di bagi kedalam dua fase t1 hari ketika inventory telah diterima dan pesanan telah diisi dan dikirim, fase kedua t2 ketika stock out terjadi dan semua pesanan baru telah dilakukan pada back order.

Untuk mencari average inventory dapat menggunakan rumus berikut:

$$Average\ inventory = \frac{{}^{1}\!/_{2}(Q-S)t_1+0t_2}{t_1+t_2} = \frac{{}^{1}\!/_{2}(Q-S)t_1}{T}$$

Kita dapat mencari t_1 dengan rumus:

$$t_1 = \frac{Q-S}{d}\quad hari$$

Untuk menghitung waktu cycle dapat menggunakan rumus berikut:

$$T = \frac{Q}{d}\quad hari$$

Maka kita dapat mencari average inventory dapat menggunakan rumus berikut:

$$Average\ inventory = \frac{{}^{1}\!/_{2}\,(Q-S)[\frac{Q-S}{d}]}{{}^{Q}\!/_{d}} = \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Untuk mencari jumlah order per tahun dapat menggunakan rumus:

$$Annual\ number\ of\ orders = \frac{D}{Q}$$

Untuk mencari average backorder adalah:

$$Average\ backorder = \frac{0t_1 + (\frac{S}{2})t_2}{T} = \frac{(S02)t_2}{T}$$

$$t_2 = \frac{S}{d}$$

$$Average\ backorders = \frac{(S/2)(\frac{S}{d})}{Q/d} = \frac{S^2}{2Q}$$

Dimana:

C_h = Biaya penyimpanan (holding cost)

C_o = Biaya pemesanan (order cost)

C_b = Biaya backorder

Untuk menghitung total cost TC dengan backorder adalah:

$$TC = \frac{(Q-S)^2}{2Q} C_h + \frac{D}{Q} C_o + \frac{S^2}{2Q} C_b$$

Untuk mencari kuantitas minimal optimal dan backorder adalah sebagai berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}\left(\frac{C_h+C_b}{C_b}\right)}$$

$$S* = Q*\left(\frac{C_h}{C_h+C_b}\right)$$

Contoh 3

Perusahaan Komponen Radio Higley yang memproduksi komponen radio dengan asumsi model inventory menggunakan *backorders*. Informasi yang diperoleh pada perusahaan ini dengan permintaan tahunannya adalah 2000 unit per tahun, biaya penyimpanan tahunan diperkirakan sebesar 20%, biaya per unit adalah \$ 50 per unit, biaya pemesanan adalah \$ 25 per order, biaya backorder adalah \$ 30 per unit per tahun, dan jumlah hari kerja 250 hari pertahun.

Dari kasus tersebut, hitunglah:

a. Kuantitas optimal (Q*)!
b. Kuantitas Bakcorders (S*)!
c. Waktu siklus!
d. Total Biaya tahunan!

Jawaban

Untuk menjawab kasus di atas kita tuliskan terlebih dahulu apa yang diketahui dari soal tersebut seperti berikut:

Diketahui :
D = 2.000 unit
C = $ 50
C_o = $ 25
I = 0,20
C_h = (0,20) (50) = $ 10
C_b = 30
Hari kerja per tahun = 250 hari

a. Untuk menghitung Q* adalah sebagai berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}\left(\frac{C_h + C_b}{C_b}\right)}$$

$$Q* = \sqrt{\frac{2(2000)(25)}{(10)}\left(\frac{10+30}{30}\right)}$$

$$Q* = 115$$

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan jumlah kuantitas optimal adalah 115 unit

b. Untuk menghitung S* adalah sebagai berikut:

$$S* = Q*\left(\frac{C_h}{C_h + C_b}\right)$$

$$S* = 115*\left(\frac{10}{10+30}\right)$$

$$S* = 29$$

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan kuantitas optimal backorder adalah 29 unit

c. Untuk menghitung Waktu siklus adalah sebagai berikut:

$$T = \frac{250}{D/_{Q*}} = \frac{250\,Q*}{D}$$

$$T = \frac{250\ (115)}{2000}$$

$$T = 14{,}4$$

Dari hasil perhitungan di atas memperlihatkan waktu siklusnya selama 14,4 hari kerja

d. Untuk menghitung Total biaya tahunannya adalah sebagai berikut:

$$TC = \frac{(Q-S)^2}{2Q} C_h + \frac{D}{Q} C_o + \frac{S^2}{2Q} C_b$$

$$TC = \frac{(115-29)^2}{2(115)} 10 + \frac{2000}{115} 25 + \frac{29^2}{2(115)} 30$$

$$TC = 332 + 435 + 110$$

$$TC = 867$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat dilihat bahwa total biaya pertahun adalah $ 867

9.5. Model *Quantity Discounts*

Diskon kuantitas terjadi dalam berbagai situasi di mana pemasok memberikan insentif untuk jumlah pesanan yang besar dengan menawarkan biaya pembelian yang lebih rendah ketika barang dipesan dalam jumlah besar. Pada bagian ini kami menunjukkan bagaimana model EOQ dapat digunakan ketika pilihan diskon kuantitas tersedia.

Rumus untuk menentukan Q* Kuantitas minimal (optimal) adalah:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

Rumus untuk menghitung total cost adalah:

$$TC = \frac{Q}{2} C_h + \frac{D}{Q} C_o + DC$$

Dimana :

Q = Quantitas jumlah unit
Ch = biaya penyimpanan (*holding cost*) tahunan per unit
Co = biaya pemesanan (*ordering cost*)/ setup mesin tahunan per unit
D = Demand per tahun
C = biaya per unit

Contoh 3

Sebuah perusahaan produksi akan melakukan pengadaan untuk pemesanan komponen dalam kebutuhan produksinya. Suppllier memberikan diskon dalam pemesanan komponen kepadanya yang disesuaikan dengan kelompok jumlah komponen. Jika permintaan tahunan 5000 unit, biaya pemesanan $ 49 per pesanan, dan tingkat biaya penyimpanan tahunan adalah 20%. Kategori diskonnya berdasarkan jumlah pesanan dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Tabel 9.1. Kategori diskon sesuai dengan jumlah pesanan

Kagetori	Jumlah pesanan	Diskon %	Cost per unit ($)
1	0 - 999	0	5
2	1000 - 2499	3	4,85
3	2500 atau lebih	5	4,75

Dari kasus tersebut, hitunglah:

a. Berapa jumlah pesanan optimal (Q*) dari masing-masing kategori?
b. Hitunglah total cost dan kategori mana yang harus dipilih?

Jawaban

Untuk menjawab kasus di atas kita tuliskan terlebih dahulu apa yang diketahui dari soal tersebut seperti berikut:

Diketahui :

D = 5.000 unit

C_o = $ 49

I = 0,20

a. Untuk menghitung Q* optmal dari masing-masing kategori, kita dapat menggunakan rumus EOQ seperti berikut:

$$Q* = \sqrt{\frac{2DC_o}{C_h}}$$

$$Q^*_1 = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0,2)(5)}} = 700$$

$$Q^*_2 = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0,2)(4,85)}} = 711$$

$$Q^*_3 = \sqrt{\frac{2(5000)(49)}{(0,2)(4,75)}} = 718$$

Dari hasil perhitungan di atas menunjukkan jumlah kuantitas optimal pada masing-masing kategori adalah sebagai berikut:

Tabel 9.2. Kuantitas optimal dari masing-masing kategori

Kagetori	Jumlah pesanan	Q*	Kuantitas yang dipakai
1	0 - 999	700	700
2	1000 - 2499	711	1000
3	2500 atau lebih	718	2500

Dari tabel tersebut dapat kita lihat bahwa :

- Untuk Q^*_1 dengan jumlah 700 berada dalam range 0 – 999, maka jumlah tersebut digunakan untuk menghitung total cost.
- Untuk Q^*_2 dengan jumlah 711, tidak berada pada range kategori 1000 - 2499, maka yang dipakai untuk menghitung total cost adalah batas bawah 1000 unit untuk memudahkan penghitungannya.
- Untuk Q^*_3 dengan jumlah 718, tidak berada pada range kategori, maka yang dipakai untuk menghitung total cost adalah batas bawah 2500 atau lebih unit untuk memudahkan penghitungannya.

b. Untuk menghitung total cost dengan menggunakan jumlah kuantitas pada bagi soal a. dapat dilihat seperti berikut ini:

Menggunakan rumus total cost seperti berikut:

$$TC = \frac{Q}{2} C_h + \frac{D}{Q} C_o + DC$$

Untuk menghitung total cost masing-masing kategori dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 9.3. Perhitungan total cost dari masing-masing kategori

Kategori	**Unit Cost**	**Order Kuantitas**	**Biaya Penyimpanan** $\frac{Q}{2}C_h$	**Biaya Pemesanan** $\frac{D}{Q}C_o$	**Pesanan** DC	**Total Cost**
1	5	700	350	350	25.000	25.700
2	4,85	1000	485	245	24.250	24.980
3	4,75	2500	1188	98	23.750	25.036

Dari tabel tersebut dapat dilihat bahwa total cost yang paling kecil adalah kategori 2 dengan total cost $ 24.980.

9.6. Studi Kasus Model Persediaan

1. Perusahaan Beverage Company memiliki produk *soft drink* yang mempunyai tingkat permintaan tahunan konstan sejumlah 3600 kaleng. Satu kaleng *soft drink* harganya $ 3. Biaya pemesanannya adalah $ 20 per order dan biaya penyimpanan adalah 25% dari cost unit. memiliki hari kerja per tahun adalah 250 hari, dan waktu tunggu adalah 5 hari.
   Dari kasus tersebut:
   a. Hitunglah EOQ produk di atas!
   b. Berapa reorder point-nya?
   c. Berapa cycle time produk tersebut?
   d. Berapa total cost per tahun?

2. Wilson Publishing Company memproduksi buku untuk pasar ritel. Permintaan tahunan buku yang diharapkan konstan sejumlah 7200 eksemplar. Biaya per eksemplar buku adalah $14.50 dengan rating presentasi biaya penyimpanan adalah 18% dari biaya per buku. Kemudian biaya setup sebesar $150. Lini produksi pencetakan buku per tahundapat memproduksi 25.000 eksemplar. Perusahaan ini memberlakukan 250 hari dalam setahun dan lead time dalam menjalankan produksinya adalah 15 hari,
   Dengan menggunakan model produksi lot size Hitunglah:
   a. Minimal kuantitas optimal produksi lot size!
   b. Jumlah produksi yang berjalan!
   c. Cycle time!
   d. Maksimum inventory!
   e. Reorder point!
   f. Total cost per tahun!

3. Westside Auto membeli komponen yang digunakan dalam pembuatan generator mobil langsung dari pemasok. Operasi produksi generator Westside, yang dioperasikan di tingkat yang konstan, akan membutuhkan dalam setahun 12.000. Biaya pemesanan adalah $ 25 per order, biaya unit adalah $ 2,50 per komponen, dan biaya penyimpanan tahunan adalah 20% dari nilai biaya per unit. Westside memiliki 250 hari kerja per tahun dan biaya Backorder per unit per tahun adalah $ 5.
   Dari kasus tersebut. Hitunglah!
   a. Minimum cost order quantity
   b. Maximum number of backorders
   c. Maximum inventory
   d. Cycle time
   e. Total annual cost

4. Sebuah perusahaan akan melakukan pemesanan barang sesuai dengan paket diskon jumlah yang diberikan vendornya. Jika permintaan tahunan 120 unit, biaya pemesanan $ 20 per order, dan tingkat biaya penyimpanan tahunan adalah 25% dari cost unit. Tabel jumlah kuantitan dan harga dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 9.4. Paket diskon

Nama Paket	**Jumlah kuantitas**	**Harga per unit**
X	0 - 49	$30
Y	50 – 99	$28.50
Z	100 lebih	$27

Dari kasus tersebut kerjakan tugas di bawah ini:

a. Hitunglah waktu kuantitas optimal Q* pada masing-masing paket kasus tersebut!
b. Hitunglah berapa total cost pada masing-masing paket dan pilihannya paket yang mana yang paling optimal!

Modul Kuliah ke 10

TPK

Model Antrian

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami struktur sistem antrian
2. Memahami model antrian single dan model multi antrian.
3. Menghitung model antrian single dan model multi antrian

10.1. Struktur Sistem Antrian

Model antrian ini dikembangkan untuk membantu manajer memahami dan membuat keputusan yang lebih baik dalam pengoperasian jalur antrian. Dalam terminologi ilmu manajemen, baris antrian dikenal juga sebagai antrian, dan dalam pengetahuan yang berurusan dengan barisan antrian adalah dikenal sebagai teori antrian. Pada awal 1900-an, A.K. Erlang, seorang insinyur telepon Denmark, memulai studi tentang kemacetan dan waktu tunggu yang terjadi dalam penyelesaian panggilan telepon. Sejak itu, teori antrian telah berkembang jauh lebih canggih, dengan aplikasi dalam dalam berbagai macam situasi jalur antrian.

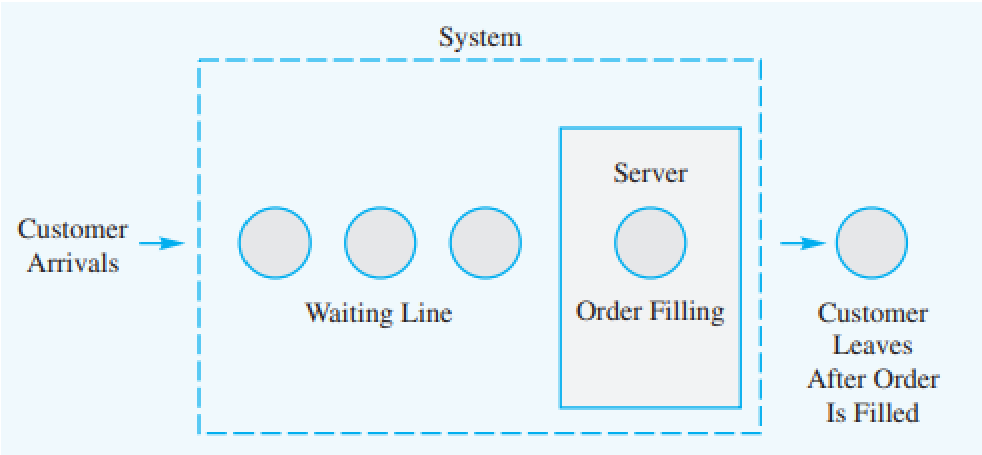
Model jalur antrian terdiri dari rumus matematika dan hubungan yang dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi (ukuran kinerja) untuk jalur antrian. Karakteristik operasi yang menarik termasuk :

1. Probabilitas bahwa tidak ada unit pada sistem
2. Rata-rata jumlah unit pada jalur antrian
3. Rata-rata jumlah unit pada sistem (jumlah unit pada jalur antrian ditambah jumlah unit yang dilayani)
4. Waktu rata-rata unit menghabiskan waktu pada jalur antrian
5. Waktu rata-rata unit menghabiskan di sistem (waktu pada jalur antrian ditambah waktu pada layanan (service)).
6. Probabilitas pada kedatangan unit yang menunggu untuk diservice

Antrian biasanya dapat terjadi pada jenis usaha layanan misalnya restoran, layanan bank, rumah sakit, pom bensin, tranportasi, dan lain sebagainya. Meskipun jenis-jenis usaha tersebut ining melayani setiap pelanggan dengan segera, tetapi kadang-kadang pelanggan lebih banyak yang datang daripada yang dapat dilayani, sehingga menimbulkan suatu antrian yang menunggu sebelum dapat dilayani. Pelaku-pelaku usaha bisnis ini biasanya khawatir kalau metode antrian yang dijalankan dapat pelanggan menunggu lama yang berlebihan untuk dapat dilayani sehingga antrian yang lama dapat menjadi penyebab kemungkinan hilangnya pelanggan. Dari masalah tersebut, maka pihak manajemen harus melakukan studi mengenai jalur antrian ini untuk membantu dalam menentukan pendekatan terbaik dalam mengurangi waktu tunggu dan meningkatkan layanannya.

a. Jalur antrian dengan satu layanan (Single-Server Waiting Line)

Model antrian ini biasanya pelanggan membentuk satu jalur antrian yang menunggu sampai dapat dilayani pada satu layanan (server). Struktur jalur satu antrian dengan satu layanan dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 10.1. Single server waiting line

b. Distribusi kedatangan

Distribusi kedatangan merupakan proses kedatangan yang menenpati jalur antrian termasuk dalam penentuan distribusi probabilitas pada jumlah kedatangan dalam periode waktu tertentu. Biasanya kedatangan terjadi secara random dan independen dari kedatangan yang lain dan kita tidak dapat memprediksi berapa jumlah kedatangan akanterjadi. Dalam kasus seperti itu distribusi probabilitas poisson dapat memberikan deskripsi yang baik pada pola kedatangan. Probabilitas poisson dapat berfungsi memberikan probabilitas dari x kedatangan dalam waktu periode tertentu. Rumus fungsi probabilitas poisson adalah sebagai berikut:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{Untuk } x = 0,1,2, \ldots$$

Dimana :

x = jumlah kedatangan dalam periode waktu

λ = rata-rata jumlah tingkat kedatangan per periode waktu

e = 2,71828

Contoh 1

Sebuah toko burger menganalisis data pada kedatangan customer dengan tingkat kedatangan adalah 45 orang per jam.Dalam periode satu menit tingkat kedatangannya menjadi

45 orang / 60 menit = 0,75 customer per menit.

Dari kasus, berapa probabilitas poisson-nya?

Jawaban

Kita dapat menggunakan rumus fungsi probabilitas poisson untuk mencari probabilitas poisson dari x customer yang datang dalam satu menit seperti berikut:

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0{,}75^x e^{-0{,}75}}{x!}$$

Dari rumus tersebut kita dapat mencari probabilitas dengan nilai x = 1, x = 2, dan x = 3 seperti berikut ini:

$$P(0) = \frac{0{,}75^0 e^{-0{,}75}}{0!} = e^{-0{,}75} = 0{,}4724$$

$$P(1) = \frac{0{,}75^1 e^{-0{,}75}}{1!} = 0{,}75\ e^{-0{,}75} = 0{,}75(0{,}4724) = 0{,}3543$$

$$P(2) = \frac{0{,}75^2 e^{-0{,}75}}{2!} = \frac{(0{,}5625)(0{,}4724}{2} = 0{,}1329$$

Hasil dari perhitungan tersebut maka:

- Probabilitas tidak ada customer dalam periode satu menit adalah 0,4724.
- Probabilitas satu customer dalam periode satu menit adalah 0,3543.
- Probabilitas dua customer dalam periode satu menit adalah 0,1329.

c. Distribusi dari waktu layanan

Waktu layanan adalah waktu yang dihabiskan pelanggan pada saat dilayani begitu layanan tersebut dimulai. Contoh pada sebuah restoran, waktu layanan dimulai ketika pelanggan mulai melakukan pemesanan dengan karyawan dan berlanjut sampai pelanggan menerima pesanan. Waktu layanan adalah jarang konstan, jumlah item yang dipesan dan campuran item yang dipesan sangat bervariasi dari satu pelanggan ke pelanggan berikutnya. Pesanan sedikit dapat ditangani dalam waktu yang cepat dalam hitungan detik, tetapi pesanan banyak mungkin membutuhkan lebih dari dua menit.

Jika distribusi probabilitas untuk waktu layanan dapat diasumsikan mengikuti distribusi probabilitas eksponensial, rumus tersedia untuk memberikan informasi yang berguna mengenai pengoperasian jalur antrian. Menggunakan distribusi probabilitas eksponensial, maka probabilitas waktu layanan akan kurang dari atau sama dengan waktu t adalah:

$$P(service\ time\ \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Dimana:

μ = Rata-rata jumlah unit yang dapat dilayani per waktu
e = 2,71828

Jumlah rata-rata unit yang dapat dilayani per periode waktu disebut tingkat layanan.

Contoh 2

Sebuah toko burger mempelajari proses pengisian pesanan dan menemukan bahwa seorang karyawan dapat memproses rata-rata 60 pesanan pelanggan per jam. Pada satu menit, tingkat layanannya μ = 60 customer/60 menit = 1 customer per menit.

Berapa probabilitas yang dapat diproses dalam :

a. Dibawah 0,5 menit?
b. Dibawah 1 menit?
c. Dibawah 2 menit?

Jawab
Untuk menghitung soal di atas dengan μ = 1, maka probabilitasnya:

$$P(service\ time\ \leq 0{,}5) = 1 - e^{-1(0{,}5)} = 1 - 0{,}6065 = 0{,}3935$$
$$P(service\ time\ \leq 1.0) = 1 - e^{-1(1.0)} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$$
$$P(service\ time\ \leq 2{,}0) = 1 - e^{-1(2{,}0)} = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$$

10.2. Model Antrian *Single-Server*

Pada bagian ini akan menyajikan rumus yang dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi kondisi stabil pada model satu antrian dan satu layanan. Rumus yang digunakan dengan tingkat kedatangan yaitu distribusi probabilitas Poisson dan waktu layanan mengikuti distribusi probabilitas eksponensial.

Rumus berikut dapat digunakan untuk menghitung karakteristik operasi kondisi stabil untuk satu jalur antrian dengan satu layanan (single server) dengan tingkat kedatangan Poisson dan waktu layanan eksponensial, dimana:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)

μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

7. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

Nilai dari tingkat kedatangan dan tingkat layanan merupakan komponen penting dalam menentukan karakteristik operasi. Pada persamaan ke 6 $\frac{\lambda}{\mu}$ menunjukkan rasio tingkat kedatangan terhadap tingkat layanan,, memberikan probabilitas bahwa unit yang tiba harus menunggu karena fasilitas layanan sedang digunakan.

Contoh 3

Ingatlah bahwa untuk masalah Burger Dome, kami memiliki tingkat kedatangan 0,75 pelanggan per menit dan tingkat layanan 1 pelanggan per menit. Hitunglah karakteristik operasi untuk Burger Dome dengan satu jalur antrian dan satu server!

Jawab:

Dari kasus tersebut dapat kita hitung menggunakan rumus dari karakteristik di atas:

a. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0{,}75}{1} = 0{,}25$

b. $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0{,}75^2}{1(1-0{,}75)} = 2{,}25\ customer$

c. $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 2{,}25 + \frac{0{,}75}{1} = 3\ customer$

d. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2{,}25}{0{,}75} = 3\ menit$

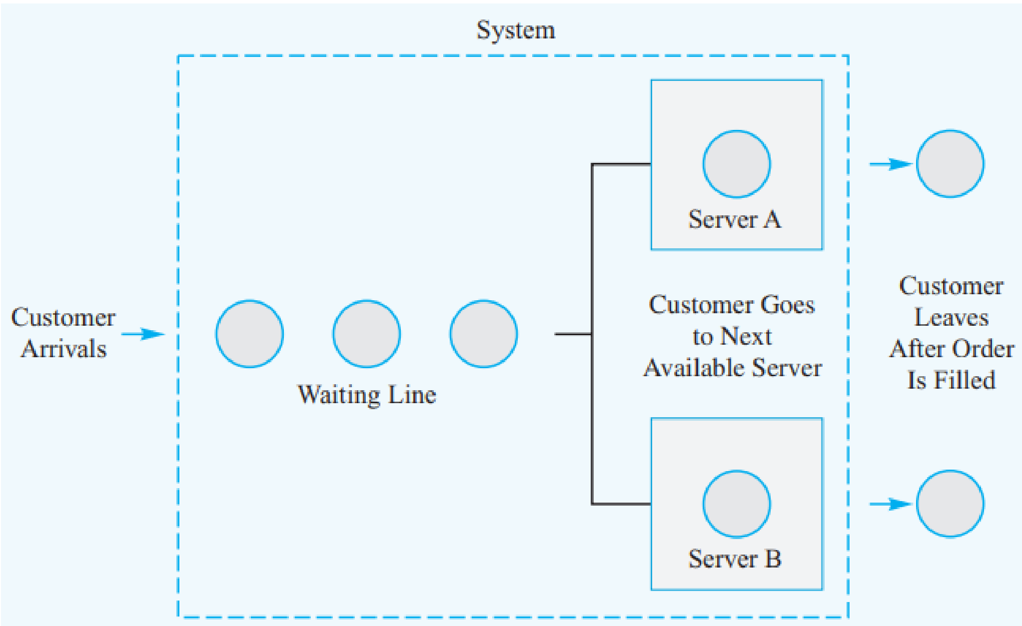
e. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3 + \frac{1}{1} = 4\ menit$

f. $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75$

10.3. Model Antrian *Multiple-Server*

Jalur antrian multi server terdiri dari dua atau lebih server (layanan) yang dianggap identik dalam hal kemampuan layanan. Pada sistem multi-server, ada dua kemungkinan antrian yaitu:

1. Pelanggan yang datang menunggu dalam satu jalur antrian dan kemudian pindah ke server pertama yang tersedia untuk diproses dan antrian selanjutnya ke server ke dua.
2. Setiap server memiliki antrian masing-masing dan pelanggan yang datang memilih salah satu jalur ini untuk bergabung dan biasanya tidak diizinkan untuk berpindah jalur antrian.



Gambar 10.2. Multi server waiting line

Pada multi server waiting line rumusnya dapat digunakan untuk menentukan karakteristik operasi dalam kondisi yang stabil pada jalur antrian beberapa server. Rumus ini berlaku jika pada kondisi berikut :

1. Kedatangan mengikuti distribusi probabilitas poisson.
2. Waktu layanan untuk masing-masing server mengikuti distribusi probabilitas exponensial.
3. Tingkat layanan µ sama pada maisng-masing server.
4. Antrian kedatangan pada satu jalur antrian dan masuk ke server untuk dilayani.

Rumus berikut dapat digunakan untuk menghitung karakteristik operasi kondisi stabil untuk jalur antrian multi server:

Dimana:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)
μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)
k = jumlah server (layanan)

1. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right)}$$

2. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^k \lambda\mu}{(k-1)!\,(k\mu - \lambda)^2} P_0$$

3. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

5. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

6. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{k\mu}{k\mu - \lambda}\right) P_0$$

7. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad \text{untuk n} \leq \text{k}$$
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{k!k^{(n-k)}} P_0 \quad \text{untuk n} > \text{k}$$

Pada rumus persamaan di atas μ adalah tingkat layanan untuk setiap server, kμ adalah tingkat layanan untuk beberapa server dalam sistem. Sebagaimana berlaku untuk model jalur antrian single-server, rumus untuk pengoperasian karakteristik jalur antrian multi server juga dapat diterapkan hanya dalam situasi di mana tingkat layanan untuk sistem melebihi tingkat kedatangan dalam sistem, dengan kata lain, rumus hanya berlaku jika kμ lebih besar dari λ

Untuk membantu menyederhanakan penggunaan persamaan multi-server, Tabel berikut berisi nilai dari P_0 yang dapat dipilih dengan nilai rasio λ/μ dan k. Besarnya nilai P_0 telah disediakan dalam tabel sesuai dengan kasus di mana kμ > λ, maka tingkat layanan sudah dapat untuk memproses semua kedatangan yang antri. Tabelnya dapat dilihat seperti berikut:

Tabel 10.1. Nilai P_0 pada multi-server waiting line

	Number of Servers (k)			
Ratio λ/μ	2	3	4	5
0.15	0.8605	0.8607	0.8607	0.8607
0.20	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187
0.25	0.7778	0.7788	0.7788	0.7788
0.30	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408
0.35	0.7021	0.7046	0.7047	0.7047
0.40	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703
0.45	0.6327	0.6373	0.6376	0.6376
0.50	0.6000	0.6061	0.6065	0.6065
0.55	0.5686	0.5763	0.5769	0.5769
0.60	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488
0.65	0.5094	0.5209	0.5219	0.5220
0.70	0.4815	0.4952	0.4965	0.4966
0.75	0.4545	0.4706	0.4722	0.4724
0.80	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493
0.85	0.4035	0.4248	0.4271	0.4274
0.90	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065
0.95	0.3559	0.3831	0.3863	0.3867
1.00	0.3333	0.3636	0.3673	0.3678
1.20	0.2500	0.2941	0.3002	0.3011
1.40	0.1765	0.2360	0.2449	0.2463
1.60	0.1111	0.1872	0.1993	0.2014
1.80	0.0526	0.1460	0.1616	0.1646
2.00		0.1111	0.1304	0.1343
2.20		0.0815	0.1046	0.1094
2.40		0.0562	0.0831	0.0889
2.60		0.0345	0.0651	0.0721
2.80		0.0160	0.0521	0.0581
3.00			0.0377	0.0466
3.20			0.0273	0.0372
3.40			0.0186	0.0293
3.60			0.0113	0.0228
3.80			0.0051	0.0174
4.00				0.0130
4.20				0.0093
4.40				0.0063
4.60				0.0038
4.80				0.0017

Contoh 4

Burger Dome restoran makanan cepat saji mempunyai masalah jalur antrian. Misalkan manajemen ingin mengevaluasi keinginan membuka layanan pemrosesan pesanan dengan dua layanan sehingga dua pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Anggap satu baris antrian dengan pelanggan pertama dalam antrean dapat dilayani pada server pertama yang tersedia dan antrian yang kedua masuk pada server kedua. Lakukan evaluasi karakteristik operasi untuk sistem dengan dua server tersebut!

Jawab

Kita dapat menggunakan rumus multi-server waiting line untuk mencari nilai karakteristik kasus di atas seperti berikut:

1. Untuk mencari P_0 kita dapat menggunakan tabel rasio multi server di atas, maka nilai:

   $P_0 = 0{,}4545$ (dilihat pada tabel dengan $\lambda/\mu = 0{,}75$ dan $k = 2$)

2. $L_q = \dfrac{\left(\frac{0{,}75}{1}\right)^2 (0{,}75)(1)}{(2-1)![2(1)-0{,}75\}^2}(0{,}4545) = 0{,}1227\ customer$

3. $L = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu} = 0{,}1227 + \dfrac{0{,}75}{1} = 0{,}8727\ customer$

4. $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0{,}1227}{0{,}75} = 0{,}1636\ menit$

5. $W = W_q + \dfrac{1}{\mu} = 0{,}1636 + \dfrac{1}{1} = 1{,}1636\ menit$

6. $P_w = \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{0{,}75}{1}\right)^2 \left[\dfrac{2(1)}{2(1)-0{,}75}\right](0{,}4545) = 0{,}2045$

10.4. Studi Kasus Model Antrian pada Perusahaan Layanan

1. Willow Brook National Bank mengoperasikan jendela drive-up teller yang memungkinkan pelanggan untuk menyelesaikan transaksi bank tanpa keluar dari mobil mereka. Pada pagi hari kerja, kedatangan ke jendela teller drive-up terjadi secara acak, dengan tingkat kedatangan 24 pelanggan per jam atau 0,4 pelanggan per menit.

   Dalam sistem jalur tunggu Willow Brook National Bank, asumsikan bahwa waktu layanan untuk teller drive-up mengikuti distribusi probabilitas eksponensial dengan tingkat layanan 36 pelanggan per jam, atau 0,6 pelanggan per menit.

   Jendela teller drive-up menggunakan satu server dalam operasi teller untuk menentukan karakteristik operasi berikut untuk sistemnya

   Dari kasus tersebut jawablah pertanyaan berikut:

   a. Berapa jumlah rata-rata atau yang diharapkan dari pelanggan yang akan tiba dalam lima menit?
   b. Asumsikan bahwa distribusi probabilitas Poisson dapat digunakan untuk menjelaskan proses kedatangan dan hitung probabilitasnya untuk 0, 1, 2, dan 3 pelanggan akan tiba selama periode lima menit!
   c. Berapa probabilitas bahwa waktu layanan adalah satu menit atau kurang?
   d. Berapa probabilitas bahwa waktu layanan adalah dua menit atau kurang?
   e. Berapa probabilitas bahwa waktu layanan lebih dari dua menit?
   f. Carilah karakteristik pada kasus tersebut P_0, L_q, L, W_q, W, P_w, P_3 !

2. Semua penumpang pesawat di Bandara Regional Lake City harus melewati screening area keamanan sebelum melanjutkan ke area boarding. Bandara ini memiliki dua stasiun screening yang tersedia. Tarif layanan untuk memproses penumpang di setiap stasiun screening adalah 3 penumpang per menit. Pada hari Senin pagi tingkat kedatangan adalah 5,4 penumpang per menit. Asumsikan bahwa waktu pemrosesan di setiap stasiun penyaringan mengikuti distribusi eksponensial dan bahwa kedatangan mengikuti distribusi Poisson

   Hitunglah karakteristik operasi screening pada kasus tersebut P_0, L_q, L, W_q, W, P_w, P_2 !

Modul Kuliah ke 11
TPK

Model Antrian Lanjut

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami model antrian single dengan waktu sevice yang berubah
2. Memahami model waiting line dengan jumlah populasi yang diketahui.
3. Menghitung model antrian single dan model waiting line dengan jumlah populasi yang diketahui

11.1. Model Antrian Single Dengan Waktu Sevice Yang Berubah

Model ini yaitu model jalur antrian satu server di mana kedatangan secara distribusi probabilitas poisson dengan asumsi bahwa distribusi probabilitas untuk waktu layanan bukan distribusi probabilitas eksponensial. Jadi, menggunakan notasi Kendall, model jalur antrian adalah model M/G/1, di mana G menunjukkan distribusi probabilitas umum atau tidak spesifik.

Notasi yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik operasi untuk model M/G/1 adalah sebagai berikut:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)

μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)

σ = standar deviaasi pada waktu layanan

Beberapa karakteristik operasi kondisi-stabil dari model jalur antrian M/G/1 adalah sebagai berikut:

8. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

9. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)}$$

10. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

11. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

12. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

13. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Nilai dari tingkat kedatangan dan tingkat layanan merupakan komponen penting dalam menentukan karakteristik operasi. Pada persamaan ke 6 $\frac{\lambda}{\mu}$ menunjukkan rasio tingkat kedatangan terhadap tingkat layanan,, memberikan probabilitas bahwa unit yang tiba harus menunggu karena fasilitas layanan sedang digunakan.

Contoh 1

Penjualan eceran di Hartlage's Seafood Supply ditangani oleh satu petugas. Kedatangan pelanggan mengikuti distribusi Poisson, dan tingkat kedatangan adalah 21 pelanggan per jam atau λ = 21/60 = 0,35 customer per menit. Menurut hasil pengamatan memperlihatkan waktu service rata-rata 2 menit per customer dan standar deviasi populasi σ = 1,2 menit. Rata-rata tingkat layanan (service) μ = 0,5 customer per menit. Berapakah Karakteristik operasi dengan model M/G/1 sistem jalur antrian tersebut?

Jawab:

Dari kasus tersebut dapat kita hitung menggunakan rumus dari karakteristik di atas:

g. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{0,35}{0,5} = 0,30$

h. $L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + (\lambda/\mu)^2}{2(1-\lambda/\mu)} = L_q = \frac{(0,35)^2(1,2)^2 + (0,35/0,5)^2}{2(1-0,35/0,5)} = 1,1107\ customer$

i. $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,1107 + \frac{0,35}{0,5} = 1,8107\ customer$

j. $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,1107}{0,35} = 3,1733\ menit$

k. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = 3,1733 + \frac{1}{0,5} = 5,1733\ menit$

l. $P_w = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,35}{0,5} = 0,70$

Manajer Hartlage dapat meninjau karakteristik operasi yang dihasilkan ini untuk menentukan penambahan petugas kedua tampaknya bermanfaat.

11.2. Model Waiting Line Dengan Jumlah Populasi Yang Diketahui

Model ini dapat digunakan ketika asumsi jumlah unit atau pelanggan maksimum yang mengantri pada jalur antrian diketahui. Pada kondisi ini tingkat kedatangan pada sistem berubah, tergantung pada jumlah unit pada antrian, model antrian ini ini disebut model dengan jumlah populasi terbatas atau diketahui.

Rumus untuk karakteristik operasi antrian sebelumnya model jalur harus dimodifikasi untuk memperhitungkan efek dari populasi yang terbatas. Model populasi dengan jumlah terbatas yang dibahas dalam bagian ini didasarkan pada asumsi yang berikut ini:

1. Kedatangan tiap unit mengikuti distribusi probabilitas poisson dengan tingkat kedatangan λ.
2. Waktu service mengikuti distribusi probabilitas exponensial dengan tingkat layanan μ.
3. Populasi unit yang dilayani jumlahnya diketahui.

Berdasarkan asumsi yang digunakan yaitu tingkat kedatangan tetap konstan pada beberapa unit dalam sistem antrian. Asumsi yang dipakai adalah jumlah populasi yang terbatas. Model ini menggunakan satu server, maka model jalur antrian ini disebut juga model M/M/1 dengan populasi yang diketahui.

Notasi yang digunakan untuk menggambarkan karakteristik operasi untuk model M/M/1 adalah sebagai berikut:

λ = jumlah rata-rata kedatangan per periode waktu (tingkat kedatangan)
μ = jumlah rata-rata layanan per periode waktu (tingkat layanan)
N = jumlah populasi

8. Probabilitas tidak ada unit pada sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

9. Rata-rata jumlah unit pada antrian

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

10. Rata-rata jumlah unit pada sistem :

$$L = L_q + (1 - P_0)$$

11. Rata-rata waktu unit yang dihabiskan pada antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda}$$

12. Rata-rata waktu yang dihabiskan pada sistem:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

13. Probabilitas kedatangan unit tidak menunggu untuk dilayani:

$$P_w = 1 - P_0$$

14. Probabilitas untuk n unit dalam sistem:

$$P_n = \frac{N1}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \quad \text{untuk n = 0,1,…,N}$$

Contoh 4

Perusahaan Manufaktur Kolkmeyer menggunakan enam mesin identik, yang masing-masing beroperasi rata-rata 20 jam antar kerusakan. Dengan demikian, tingkat kedatangan atau permintaan untuk layanan perbaikan untuk setiap mesin adalah λ =1/20 = 0,05 per jam. Kejadian kerusakan mesin mengikuti distribusi probabilitas poisson untuk menentukan proses tingkat kedatangan. Satu orang dari bagian teknisi disediakan sebagai single server layanan perbaikan untuk 6 mesin tersebut.Waktu service mengikuti distribusi ekponensial dengan 2 jam per mesin atau tingkat layanan (service rate) μ = 0,5 mesin per jam. Hitunglah karakteristik pada kasus tersebut!

Jawab:

Diketahui

λ = 0,05 dan μ = 0,5 dengan N = 6, maka:

a. $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{6!}{(6-0)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^0 + \frac{6!}{(6-1)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^1 + \frac{6!}{(6-2)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^2 + \frac{6!}{(6-3)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^3 + \frac{6!}{(6-4)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^4 + \frac{6!}{(6-5)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^5 + \frac{6!}{(6-6)!}\left(\frac{0,05}{0,5}\right)^6}$$

= 0,4845

b. $L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - P_0) = L_q = 6 - \left(\frac{0,05+0,5}{0,05}\right)(1 - 0,4845) = 0,3295\ mesin$

c. $L = L_q + (1 - P_0) = L = 0,3295 + (1 - 0,4845) = 0,8451\ mesin$

d. $W_q = \frac{L_q}{(N-L)\lambda} = W_q = \frac{0,3295}{(6-0,8451)0,50} = 1,279\ jam$

e. $W = W_q + \frac{1}{\mu} = W = 1,279 + \frac{1}{0,50} = 3,279\ jam$

f. $P_w = 1 - P_0 = P_w = 1 - 0,4845 = 0,5155$

11.3. Studi Kasus Model Antrian Pada Perusahaan Layanan

1. Pada suatu pabrik perakitan yang sedang memproduksi perakitan produk tertentu yang mengasumsikan bahwa tingkat kedatangan pekerjaan adalah lima pekerjaan per jam. Waktu layanan (1 menit per pekerjaan) dan tidak mengikuti distribusi probabilitas eksponensial. Dua desain yang diusulkan untuk operasi perakitan pabrik ditampilkan sebagai berikut:

   Tabel 11.1. Waktu layanan

	Waktu Layanan	
Design	**Mean**	**Standar Deviasi**
A	6	3
B	6,25	0,6

   Dari kasus tersebut jawablah pertanyaan berikut:

   g. Berapa waktu rata-rata layanan dalam pekerjaan per jam untuk masing-maisng design?
   h. Dari waktu rata-rata layanan pada bagian a, design mana yang lebih cepat waktu rata-rata layanannya?
   i. Berapa standar deviasi dari waktu layanan dalam 1 jam?
   j. Menggunakan model M/G/1, Carilah karakteristik pada masing-masing design tersebut P_0, L_q, L, W_q, W, P_w !

2. Lima asisten administrasi menggunakan mesin fotokopi kantor. Waktu rata-rata antar kedatangan untuk setiap asisten adalah 40 menit sama dengan tingkat kedatangan adalah 1/40 = 0.025 orang per menit. Mean masing-masing asisten menghabiskan waktu untuk fotocopy adalah 5 menit, sama dengan tingkat layanan 1/5 = 0,20 pekerjaan per menit. Menggunakan model M/M/1, carilah pertanyaan berikut:

   Hitunglah karakteristik operasi screening pada kasus tersebut P_0, L_q, L, W_q, W, P_w, P_2 !

Modul Kuliah ke 12

TPK

Proses Markov

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Memahami konsep proses markov
2. Merumuskan masalah dalam analisis proses markov.
3. Mencari penyelesaian masalah dalam proses perhitungan menggunakan proses markov

12.1. Konsep Proses Markov

Konsep dasar analisis markov adalah status dari sistem atau status transisi, sifat dari proses ini adalah apabila diketahui proses berada dalam suatu keadaan tertentu, maka peluang berkembangnya proses di masa mendatang hanya tergantung pada keadaan saat ini dan tidak tergantung pada keadaan sebelumnya, atau dengan kata lain rantai Markov adalah rangkaian proses kejadian dimana peluang bersyarat kejadian yang akan datang tergantung pada kejadian sekarang.

Model markov berhubungan dengan suatu rangkaian proses dimana kejadian akibat suatu eksperimen hanya tergantung pada kejadian yang langsung mendahuluinya dan tidak tergantung pada rangkaian kejadian sebelum-sebelumnya yang lain.

Model proses Markov berguna dalam mempelajari evolusi sistem melalui percobaan yang berulang-ulang. Percobaan berulang sering kali sukses berdasarkan periode waktu berturut-turut di mana keadaan sistem dalam periode tertentu tidak dapat ditentukan dengan pasti. Sebaliknya, probabilitas transisi digunakan untuk menggambarkan cara di mana sistem membuat transisi dari satu periode ke periode selanjutnya.

Model proses Markov dapat digunakan untuk menggambarkan probabilitas bahwa suatu mesin dapat berfungsi dalam satu periode akan terus berfungsi atau akan mogok di periode berikutnya. Model juga dapat digunakan untuk menggambarkan probabilitas bahwa konsumen membeli merek A di satu periode akan membeli merek B di periode berikutnya. Seperti contoh Sebuah layanan kesehatan dan layanan perawatan, menjelaskan bagaimana model proses Markov digunakan untuk menentukan probabilitas status kesehatan untuk orang berusia 65 dan lebih tua. Informasi tersebut sangat membantu dalam memahami kebutuhan dimasa depan untuk program layanan perawatan kesehatan dan manfaat memperluas layanan kesehatan saat ini

12.2. Analisis Proses Markov

Sebelum analisis proses markov kita perlu untuk mengetahui probabilitas transisi. Probabilitas Transisi adalah perubahan dari satu status ke status yang lain pada periode (waktu) berikutnya dan merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas. Untuk lebih jelas perpindahan status dari waktu sekarang ke status pada waktu selanjutnya, dapat diliha pada tabel berikut:

Tabel 12.1. Matrik Probabilitas Transisi

Dari Status ke:	Pindah ke status ke:					
	1	2	..	j	..	n
1	P_{11}	P_{12}	..	P_{1j}	..	P_{1n}
2	P_{21}	P_{22}	..	P_{2j}	..	P_{2n}
..	..	..	..	..	..	..
i	P_{i1}	P_{i2}	..	P_{ij}	..	P_{in}
..	..	..	..	..	..	..
n	P_{n1}	P_{n2}	..	P_{nj}	..	P_{nn}

Dari tabel di atas kita lihat bahwa n adalah jumlah keadaan dalam proses dan pij adalah kemungkinan transisi dari keadaan saat i ke keadaan j. Jika saat ini berada pada keadaan i maka baris i dari tabel di atas berisi angka-angka pi1, pi2,.., pij,.., pin merupakan kemungkinan berubah ke keadaan berikutnya. Oleh karena angka tersebut melambangkan kemungkinan, maka semuanya melupakan bilangan non negatif dan tidak lebih dari satu. Secara matematis:

$$0 < pij < 1 \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$\Sigma\ pij = 1 \quad i = 1, 2, ..., n$$

Contoh 1

Pada suatu kota kecil terdapat dua pasar swalayan W dan L. Diasumsikan setiap pembeli di kota tersebut melakukan kunjungan belanja satu kali per minggu. Dalam sembarang minggu seorang pembeli hanya berbelanja di W atau di L saja, dan tidak di keduanya. Kunjungan belanja disebut percobaan (trial) dari proses dan toko yang dipilih disebut keadaan dari proses. Suatu sampel 100 pembeli diambil dalam periode 10 minggu, kemudian data dikompilasikan.

Dalam menganalisis data, terlihat bahwa dari seluruh pembeli yang berbelanja di W dalam suatu minggu, 90 persen tetap berbelanja di toko W pada minggu berikutnya, sedangkan sisanya berpindah belanja pada toko L. 80 persen dari yang berbelanja di toko L dalam suatu minggu tetap berbelanja di toko L sedangkan 20 persen berpindah belanja pada toko W. Informasi tersebut disusun pada tabel 2 berikut :

Tabel 12.2. Matriks Transisi

Pilihan pada suatu minggu	**Pilihan minggu berikutnya**	
	W	**L**
W	90	10
L	20	80

Pada baris pertama dan baris kedua berjumlah 100, tetapi jumlah kolom tidak. Informasi ini digunakan untuk membuat matriks kemungkinan perpindahan keadaan / transisi.

Didefinisikan :

Keadaan 1 : Pembeli berbelanja di W

Keadaan 2 : Pembeli berbelanja di L

Dengan demikian matriks kemungkinan transisinya adalah :

Tabel 12.3. Probabilitas transisi pembeli

Pilihan pada suatu minggu	**Pilihan minggu berikutnya**	
	W	**L**
W	90/100 = 0.9	10/100 = 0.1
L	20/100 = 0.2	80/100 = 0.8

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa probabilitas pada setiap baris berjumlah satu. Untuk mendapatkan analisa rantai markov ke dalam suatu kasus, ada beberapa syarat yang harus dipenuhi, adalah sebagai berikut:

1. Jumlah probabilitas transisi untuk suatu keadaan awal dari sistem sama dengan 1.
2. Probabilitas-probabilitas tersebut berlaku untuk semua partisipan dalam sistem.
3. Probabilitas transisi konstan sepanjang waktu.
4. Kondisi merupakan kondisi yang independen sepanjang waktu.

Penerapan analisa markov dapat dibilang cukup terbatas karena sulit menemukan masalah yang memenuhi semua sifat yang diperlukan untuk analisa markov, terutama persyaratan bahwa probabilitas transisi harus konstan sepanjang waktu .

Untuk menggambarkan probabilitas transisi, kita dapat menggunakan probabilitas Tree yaitu cara yang mudah untuk menggambarkan sejumlah transisi tertentu dari suatu proses Markov

Contoh 2

Sebuah perusahaan transportasi mempunyai 220 unit mobil. Namun tidak semua mobil dapat beroperasi dikarenakan mesin rusak. Data mobil yang sedang beroperasi(narik) dan rusak(mogok) adalah sebagai berikut :

Tabel 12.4. Transisi perpindahan status mobil

Status saat ini	**Banyaknya mobil**	
	Hari 1	**Hari 2**
Narik	120	144
Mogok	100	76
Jumlah	220	220

Dalam waktu dua hari ini terdapat perubahan, mobil yang beroperasi ternyata mengalami kerusakan, dan sebaliknya. Untuk mengetahui perubahan yang terjadi dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 12.5. Transisi perpindahan

Hari l	**Hari II**		**Jumlah**
	Narik	**Mogok**	
Narik	70	50	120
Mogok	74	26	100
Jumlah	144	76	220

Dari data tersebut hitunglah :

a. Probabilitas transisi
b. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 narik
c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik
d. Probabilitas hari ke-3 narik jika hari ke-1 mogok
e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok

Jawaban :

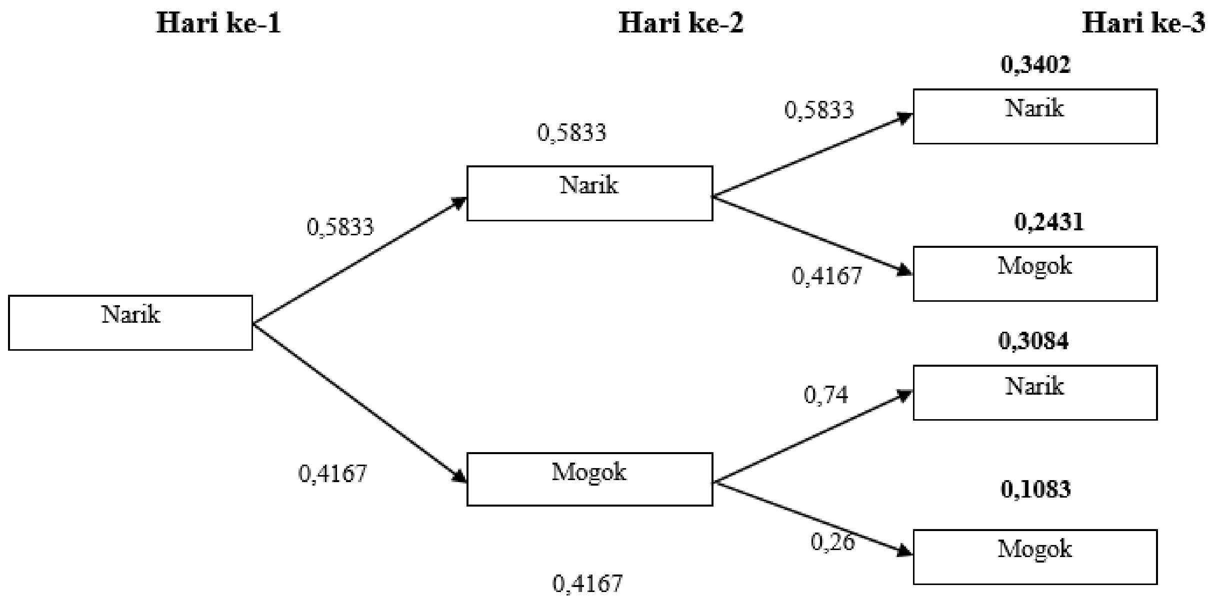
a. Probabilitas Transisi

Tabel 12.6. Probabilitas Transisi

Hari l	**Hari II**	
	Narik	**Mogok**
Narik	70/120= **0,5833**	50/120 = **0,4167**
Mogok	74/100 = **0,74**	26/100 = **0,26**

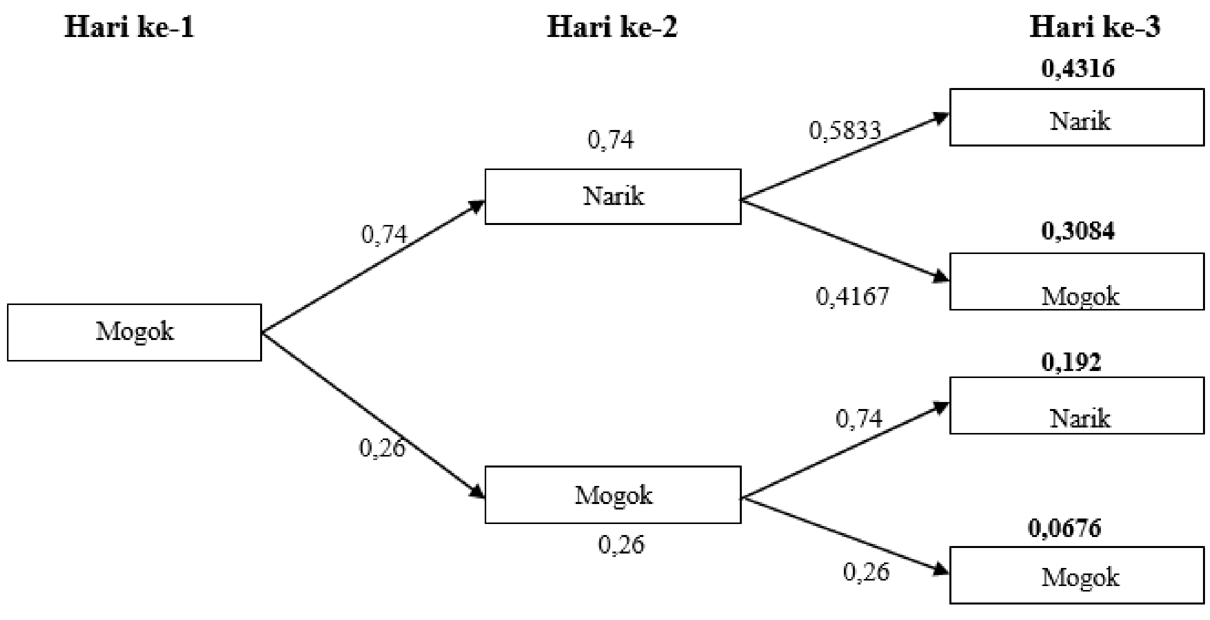
Kita dapat menggunakan diagram pohon untuk melihat perpindahan status probabilitas transisinya dengan status awal yang ditentukan seperti berikut:

Status Jika Hari ke 1 **NARIK** :



Gambar 12.1. Probabilitas Tree jika hari ke-1 NARIK

.



Gambar 12.2. Probabilitas Tree jika hari ke-1 MOGOK

Dari 2 gambar tersebut, kita bias menjawab jawab soal di atas, sehingga :

b. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 narik = 0,3402 + 0,3084 = 0,6486
c. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 narik = 0,2431 + 0,1083 = 0,3514
d. Probabilitas hari ke-3 narik, jika hari ke-1 mogok = 0,4316 + 0,1924 = 0,624
e. Probabilitas hari ke-3 mogok jika hari ke-1 mogok = 0,3084 + 0,0676 = 0,376

12.3. Analisis Proses Markov Pendekatan Matrik

Untuk menjelaskan analisis proses menggunakan pendekatan operasi matrik, kita uraikan melalui contoh berikut:

Contoh 3

Pada kasus sebelumnya pada status mobil, ada kalanya kita harus mencari probabilitas pada periode yang sangat besar, misalkan periode hari ke-9, ke-10 dan seterusnya, akan sangat menyulitkan dan membutuhkan media penyajian yang khusus jika kita menggunakan Probabilitas Tree. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Pendekatan Matriks Probabilitas.

Adapun Matriks Probabilitas dari contoh kasus di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-i jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

Probabilitas Narik $\longrightarrow$ π_i **(n)** $\longleftarrow$ **Periode ke-n**

$\uparrow$

Status Awal Narik

Probabilitas kendaraan narik pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 narik, dilambangkan dengan:

Probabilitas Narik $\longrightarrow$ π_1 **(3)** $\longleftarrow$ **Periode ke-3**

$\uparrow$

Status Awal Narik

Probabilitas kendaraan mogok pada periode ke-3 jika pada periode ke-1 mogok, dilambangkan dengan:

Probabilitas Mogok $\longrightarrow$ π_2 **(3)** $\longleftarrow$ **Periode ke-3**

$\uparrow$

Status Awal Mogok

Jawaban

Jika kendaraan pada hari ke-1 narik maka berlaku probabilitas sebagai berikut:

π_1 (l) = 1 sedangkan π_2 (l) = 0

Jika probabilitas di atas disusun ke dalam vektor baris, maka kita dapatkan:

(π_1(l) π_2(l)) = (l 0)

Adapun rumus untuk mencari probabilitas periode berikutnya (i+1) adalah:

(π_1 (i+1) π_2(i+1)) = (π_1(i) π_2 (i)) x Matriks Probabilitas Transisi

Bila rumus di atas kita gunakan untuk mencari probabilitas hari ke-2, maka:

$$(\pi_1(2) \quad \pi_2(2)) = (\pi_1(1) \quad \pi_2(1)) \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$= (1 \quad 0) \times \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$= (0{,}5833 \quad 0{,}4167)$$

Terlihat bahwa hasilnya sama dengan yang diperoleh dengan menggunakan metode Probabilities Tree. Dengan menggunakan cara yang sama kita akan dapatkan status untuk periode-periode berikutnya sebagai berikut:

$$(\pi_1(3) \quad \pi_2(3)) = (0{,}6486 \quad 0{,}3514)$$
$$(\pi_1(4) \quad \pi_2(4)) = (0{,}6384 \quad 0{,}3616)$$
$$(\pi_1(5) \quad \pi_2(5)) = (0{,}6400 \quad 0{,}3400)$$
$$(\pi_1(6) \quad \pi_2(6)) = (0{,}6397 \quad 0{,}3603)$$
$$(\pi_1(7) \quad \pi_2(7)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$
$$(\pi_1(8) \quad \pi_2(8)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Terlihat bahwa perubahan probabilitas semakin lama semakin mengecil sampai akhirnya tidak tampak adanya perubahan. Probabilitas tersebut tercapai mulai dari periode ke-7, dengan probabilitas status:

$$(\pi_1(7) \quad \pi_2(7)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Ini berarti pemilik kendaraan dapat menarik kesimpulan bahwa jika awalnya kendaraan berstatus narik, setelah beberapa periode di masa depan probabilitasnya narik adalah sebesar 0,6398 dan probabilitasnya mogok adalah sebesar 0,3602.

Untuk perhitungan probabilitas status hari pertama mogok dapat kita cari dengan metode yang sama dan akan kita dapatkan probabilitas yang akan sama untuk periode selanjutnya, mulai dari periode ke-8. Adapun probabilitas pada periode ke-8 adalah:

$$(\pi_1 (8) \quad \pi_2 (8)) = (0{,}6398 \quad 0{,}3602)$$

Dari contoh kasus di atas dengan status hari ke-1 narik, maka kita dapatkan:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Untuk mengurangi keruwetan, periode (i) dapat kita hilangkan, karena pada saat Steady State tercapai periode tidak akan mempengaruhi perhitungan. Sehingga perhitungan di atas akan menjadi:

$$(\pi_1 (2) \quad \pi_2 (2)) = (\pi_1 (1) \quad \pi_2 (1)) \begin{bmatrix} 0{,}5833 & 0{,}4167 \\ 0{,}74 & 0{,}26 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas akan menghasilkan persamaan berikut:

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74\, \pi_2$ .... (1)

$\pi_2 = 0{,}4167\, \pi_1 + 0{,}26\, \pi_2$ .... (2)

Karena salah satu ciri proses markov adalah: π_1 (i) + π_2 (i) = 1, maka:

$\pi_1 + \pi_2 = 1 \qquad \pi_2 = 1 - \pi_1$

Dengan menstubstitusikan $\pi_2 = 1 - \pi_1$ ke persamaan (1) didapatkan:

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74(l - \pi_1)$

$\pi_1 = 0{,}5833\, \pi_1 + 0{,}74 - 0{,}74\, \pi_1$

$l{,}1567\, \pi_1 = 0{,}74$

$\pi_1 = 0{,}6398$

Lalu kita masukkan nilai $\pi_1 = 0{,}6398$ ke dalam persamaan (2) didapatkan:

$\pi_2 = 0{,}4167\, \pi_1 + 0{,}26\, \pi_2$

$\pi_2 = 0{,}4167\,(0{,}6398) + 0{,}26\, \pi_2$

$\pi_2 = 0.2666 + 0{,}26\, \pi_2$

$0{,}74\, \pi_2 = 0.2666$

$\pi_2 = 0{,}3602$

Contoh 4

Dari contoh kasus kita ketahui bahwa Pemilik Kendaraan memiliki 220 kendaraan. Dengan menggunakan Probabilitas Steady State yang sudah kita dapatkan, Pemilik dapat mengharapkan jumlah kendaraan setiap harinya narik atau mogok sebanyak:

Narik : Nn x 220 = 0,6398 x 220= 140,756 atau sebanyak 141 kendaraan

Mogok : Mn x 220 = 0,3602 x 220= 79,244 atau sebanyak 79 kendaraan

Misalkan Pemilik kurang puas dengan tingkat operasi yang ada dan ingin meningkatkannya, sehingga Pemilik mengambil kebijakan untuk menggunakan suku cadang asli dalam setiap perawatan armada. Kebijakan ini membuat Matriks Probabilitas Transisi berubah menjadi:

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Dari matrik tersebut dapat kita artikan bahwa kebijakan ini membuat Probabilitas saat ini narik, lalu hari berikutnya mogok menurun dari 0,4 menjadi 0,3. Probabilitas Steady State yang baru adalah:

$$(\pi_1 \quad \pi_2) = (\pi_1 \quad \pi_2) \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,74 & 0,26 \end{bmatrix}$$

Sehingga kita adpatkan persamaan berikut:

$\pi_1 = 0,7\,\pi_1 + 0,74\,\pi_2$………………………(1)

$\pi_2 = 0,3\,\pi_1 + 0,26\,\pi_2$……………………(2)

Substitusikan $\pi_1 = 1 - \pi_2$ ke persamaan (2), sehingga kita dapatkan:

$\pi_2 = 0,2885$ dan $\pi_1 = 0,7116$

Artinya setiap harinya Pemilik dapat mengharapkan kendaraan yang narik atau mogok sebanyak:

Narik : π_1 x 220 = 0,7116 x 220 = 156,55 atau sebanyak 157 kendaraan

Mogok : π_2 x 220 = 0,2885 x 220 = 63,47 atau sebanyak 63 kendaraan

Kebijakan tersebut menghasilkan kenaikan operasional dari 141 kendaraan perhari menjadi 157 kendaraan perhari. Dalam hal ini Pemilik harus mengevaluasi kebijakan ini, apakah kenaikan pendapatan operasional dapat menutupi kenaikan biaya operasional karena kebijakan ini. Misalkan karena kebijakan ini terjadi kenaikan biaya perawatan kendaraan sebesar Rp. 1.000.000,- setiap harinya. Jadi bila kenaikan pendapatan operasional lebih besar dari Rp. 1.000.000,- maka kebijakan tersebut layak untuk dijalankan.

12.4. Studi Kasus Pemodelan Proses Markov pada Perusahaan

1. Manajemen dari Perusahaan New Fangled Softdrink Company percaya bahwa probabilitas pelanggan yang membeli produk Red Pop yang bersaing perusahaan lain yang memproduksi produk Super Cola, yang didasarkan pada pembelian produk oleh pelanggan. Asumsi dari probabilitas transisi adalah sebagai berikut :

Tabel 12.7. Transisi probabilitas pelanggan

Pembelian hari ini	**Pembelian selanjutnya**	
	Red Pop	**Super Cola**
Red Pop	0,9	0,1
Super Cola	0,1	0,9

Dari kasus tersebut jawablah pertanyaan berikut:

k. Buatlah gambar pohon diagram dan berapa probabilitas pada pembelian Red Pop yang ke-3 dengan status hari pembelian pertama adalah Red Pop?
l. Buatlah gambar pohon diagram dan berapa probabilitas pada pembelian Red Pop yang ke-3 dengan status hari pembelian pertama adalah Super Cola ?
m. Hitunglah berapa probabilitas steady-state kasus tersebut!

2. Server email di Universitas Rockbottom telah mengalami downtime. Mari kita asumsikan bahwa uji coba dari proses Markov terkait didefinisikan sebagai periode satu jam dan bahwa probabilitas sistem berada dalam keadaan berjalan atau keadaan turun didasarkan pada keadaan sistem pada periode sebelumnya. Data historis menunjukkan probabilitas transisi berikut:

Tabel 12.8. Transisi pada sistem Universitas Rockbottom

Jam Sekarang	**Jam selanjutnya**	
	Running	**Down**
Running	0,9	0,1
Down	0,3	0,7

a. Jika sistem pada jam sekarang Running, berapakah probabilitas sistem Down pada jam berikutnya?
b. Jika sistem pada jam sekarang Running, berapakah probabilitas sistem Running pada jam ke 3 berikutnya?
c. Hitunglah berapa probabilitas steady-state untuk status Running dan Down!

Modul Kuliah ke 13

TPK

Proses Markov bagian 2

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:
1. Merumuskan masalah dalam analisis piutang dengan proses markov.
2. Mencari penyelesaian masalah dalam piutang dengan proses markov

13.1. Analisis Piutang Usaha

Aplikasi akuntansi dimana menggunakan proses Markov telah menghasilkan hasil yang berguna dalam estimasi piutang tak tertagih. piutang tak tertagih adalah perkiraan jumlah piutang yang pada akhirnya akan terbukti tidak tertagih.

Sebuah penerapan matriks keadaan terserap yang unik dan populer adalah contoh hutang tak tertagih (bad debt). Dalam contoh ini, keadaan yang ada adalah bulan dimana pelanggan berhutang. Pelanggan dapat membayar (yaitu tagihan) setiap saat dan oleh karenanya mencapai suatu keadaan terserap untuk melakukan pembayaran. Walaupun demikian, jika pelanggan berhutang lebih lama dari sejumlah periode tertentu, hutang tersebut akan dianggap "buruk" dan akan dipindahkan ke penagih hutang. Keadaan "hutang tak tertagih" juga merupakan keadaan terserap. Melalui berbagai manipulasi matriks, bagian dari piutang yang akan dibayar dan yang akan menjadi tak terbayar dapat ditentukan.

Contoh 1

Perusahaan A to z Office Supply memberikan hutang kepada nasabah yang akan diperagakan dengan menggunakan matriks transisi berikut, yang menggambarkan piutang bagi nasabah

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ 1 \\ 2 \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & 1 & 2 & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dalam matriks transisi keadaan terserap ini, keadaan p menandakan bahwa hutang telah dibayar, keadaan 1 dan 2 menandakan bahwa hutang telah berusia satu atau dua bulan, dan keadaan b menandakan bahwa hutang telah menjadi buruk (tak tertagih)

Ketika hutang telah dibayar (yaitu ketika memasuki keadaan p), probabilita perpindahan ke keaadan 1, 2, atau b adalah nol. Jika hutang berusia satu bulan, terdapat probabilita sebesar .70 bahwa ia akan dibayar dalam bulan berikutnya dan probabilita sebesar .30 bahwa hutang tersebut akan berusia 2 bulan dengan keadaan belum terbayar. Jika hutang berada dalam bulan 2, terdapat probabilita sebesar .50 bahwa ia akan dibayar dan probabilita sebesar .50 bahwa hutang tersebut menjadi tidak terbayar di periode berikutnya. Akhirnya, jika hutang menjadi tak terbayar, tidak terdapat probabilita bahwa hutang tersebut akan kembali ke keadaan sebelumnya

Langkah selanjutnya dalam analisa masalah Markov ini adalah mengatur kembali matriks transisi ke dalam bentuk berikut in

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ b \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & b & 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0,7 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Kemudian, matriks transisi tersebut dibagi menjadi empat bagian, atau sub matriks, yang ditandai sebagai berikut :

$$T = \left[\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline R & Q \end{array}\right]$$

Dimana:

$$I = \begin{array}{c} \\ p \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad = \text{Matrik Identitas}$$

$$0 = \begin{array}{c} \\ p \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad = \text{Matrik nol}$$

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

= Matrik yang berisi probabilita transisi dari hutang yang terserap (absorbed) ke periode berikutnya

$$Q = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0,3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

= Matriks yang berisi probabilita transisi untuk pergerakan di antara kedua keadaan tak terserap (non absorbing)

Matriks bertanda I adalah sebuah matriks identitas, disebut demikian karena memiliki angka satu sepanjang diagonal dan nol di sisi lain matriks.

Operasi matriks pertama yang dilakukan adalah menentukan matriks fundamental N, sebagai berikut:

$$N = (I - Q)^{-1}$$

Notasi untuk memangkatkan matriks (I – Q) dengan pangkat –1 menunjukkan apa yang disebut sebagaik kebalikan (inverse) dari sebuah matriks. Matriks fundamental dihitung dengan mengambil kebalikan dari perbedaan antara matriks identitas, I, dan Q. Untuk perhitungan contoh di atas, matriks fundamental dihitung sebagai berikut.

$$N = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0{,}3\\0 & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$N = \begin{bmatrix}1 & -0{,}3\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ Lihat pada Appendix 17.1

Matriks fundamental menandakan jumlah yang diharapkan keberadaan sistem dalam keadaan tak terserap (non absorbing) sebelum penyerapan terjadi. Oleh karena itu, berdasarkan N, jika pelanggan dalam keadaan 1 (terlambat 1 bulang dalam pembayaran hutang), perkiraan bahwa pelanggan akan terlambat 2 bulan adalah .30 sebelum hutang dibayar atau menjadi buruk.

Selanjutnya matriks fundamental dikalikan dengan matriks R yang dibuat ketika matriks transisi asli diikutsertakan.

$$N.R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

13.2. Penentuan Piutang Usaha Tak Tertagih

Matriks N x R mencerminkan probabilita bahwa hutang pada akhirnya akan terserap, dengan keadaan awal manapun. Sebagai contoh, jika hutang saat ini berada dalam bulan pertama, terdapat probabilita sebesar .85 bahwa pada akhirnya hutang tersebut akan dibayar dan probabilita sebesar .14 bahwa hutang tersebut akan menjadi tak terbayar

Contoh 2

Dari kasus contoh sebelumnya, kita anggap Perusahaan A to Z Office Supply memiliki piutang sebesar $4000 dalam bulan 1 dan $6000 dalam bulan 2. Untuk menentukan berapa bagian dari dana ini yang dapat ditagih dan berapa bagian yang akan menjadi hutang tak tertagih, kalikan matriks dalam jumlah dolar ini dengan matriks N. R atau B x N x R. Hasilnya adalah sebagi berikut:

$$\text{Penentuan piutang} = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 4.000 & 6.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Penentuan piutang} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & b \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6.400 & 3.600 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka, dari jumlah $10,000 yang terhutang, perusahan peralatan kantor tersebut dapat memperkirakan sebesar $6400 dan $3600 akan menjadi hutang tak tertagih.

13.3. Studi Kasus Pemodelan Proses Markov 2 pada Perusahaan

1. Sebuah Perusahaan Bank yang berada di daerah Jakarta memberikan hutang kepada nasabah yang akan diperagakan dengan menggunakan matriks transisi berikut, yang menggambarkan piutang bagi nasabahnya.

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ b \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & b & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Dalam matriks transisi keadaan terserap ini, keadaan p menandakan bahwa hutang telah dibayar, keadaan 1 dan 2 menandakan bahwa hutang telah berusia satu atau dua bulan, dan keadaan b menandakan bahwa hutang telah menjadi buruk (tak tertagih).

   Dari kasus tersebut jawablah pertanyaan berikut:
   a. Buatlah matrik I, matrik 0, matrik R dan matrik Q!
   b. Buatlah matrik fundamentalnya!
   c. Buatlah matrik N.R!
   d. Dari kasus tersebut memiliki piutang sebesar $4000 dalam bulan 1 dan $5000 dalam bulan 2. Untuk menentukan berapa bagian dari dana ini yang dapat ditagih dan berapa bagian yang akan menjadi hutang tak tertagih?

Modul-14

Studi Kasus Strategi Perencanaan pada Perusahaan

1. Sebuah perusahaan kontraktor menyusun tim untuk mengerjakan suatu proyek konstruksi gedung dengan kegiatan-kegiatan yang harus dilaksanakan adalah sebagai berikut:

Tabel 14.1. Data waktu kegiatan

Kegiatan	Kegiatan Sebelumnya	Waktu (Minggu)		
		Optimistic	Most Probable	Pessimistic
A	--	1	2	2
B	A	4	6	6
C	A	2	4	4
D	B,C	1	2	2
E	B	2	3	3
F	A	1	2	2
G	D	1	2	2
H	G	1	2	2
I	E,H,F	1	1	1

   a. Buatlah diagram CPM/PERT dan hitung waktu normal proyek tersebut!
   b. Hitunglah ES, EF, LS, LF, dan Slack, kemudian tentukan jalur kritisnya?
   c. Bepara probabilitas proyek tersebut dapat selesai dalam 13 minggu?

2. Sebuah perusahaan memenuhi permintaan produk dengan permintaan 500 produk per 3 bulan. Biaya penyimpanan produk tarifnya adalah 20% dari harga unit dan biaya pemesanan per unitnya adalah $ 30. Untuk kategori harga diskon per unitnya tergantung dari jumlah yang dipesan dengan daftar seperti berikut:

Category	Order Quantity	Unit Cost
1	0 - 99	$ 36
2	100 - 199	$ 32
3	200 - 299	$ 30
4	300 atau lebih	$ 28

   a. Berapa ukuran pemesanan optimalnya dari masing-masing kategori?
   b. Berapa total cost masing-masing kategori pemesanan dan mana yang paling murah?

3. Untuk melayani nasabah, suatu bank menyediakan 4 kasir yang melayani nasabah yang akan melakukan transaksi pengambilan dan setoran dengan tingkat kedatangan para nasabah adalah 1,2 nasabah per menit berdasarkan distribusi poisson. Kasir tersebut menghabiskan waktu rata-rata 0,75 menit untuk setiap nasabah yang melakukan transaksi.
   Tentukan karakteristik operasinya (P_0, Lq, L, Wq, W, dan Pw, P3)!

4. Dua maskapai menawarkan penerbangan berjadwal mingguan dengan mudah ke bandara terdekat dengan kantor pusat perusahaan. Secara historis, penerbangan telah dijadwalkan sebagaimana tercermin dalam matrik transisi ini:

Tabel 14.2. Data

Sekarang	Minggu depan	
	Airline A	Airline B
Airline A	0,6	0,4
Airline B	0,2	0,8

   a. Jika pada saat ini menggunakan Airline A, berapa probabilitas pada minggu ke 3 akan menggunakan Airline A?
   b. Jika pada saat ini menggunakan Airline B, berapa probabilitas pada minggu ke 3 akan menggunakan Airline A?
   c. Berapakah probabilitas status stabil (steady state probabilities) pada airline tersebut?

5. Suatu bank ABC yang bergerak dalam bidang usaha keuangan memberikan layanan produk pinjaman pada sebuah Perusahaan mikro yang berupa pinjaman modal dalam rangka mengembangkan usahanya. Pengembalian pinjaman modal pada perusahaan tersebut harus dicicil setiap bulan dalam jangka 2 tahun. Setelah beberapa kali pembayaran cicilannya, peluang perusahaan tersebut dapat membayar pinjamannya dapat dilihat pada matriks transisi berikut, yang menggambarkan piutang bagi perusahaan tersebut

$$T = \begin{array}{c} \\ p \\ b \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p & b & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{bmatrix} \end{array}$$

   Dari kasus tersebut:
   a. Carilah matrik fundamentalnya!
   b. Carilah matri N.R pada kasus tersebut!
   c. Carilah BNR pada kasus tersebut dengan \$4.000 pada bulan ke 1 dan \$5.000 pada bulan kedua!

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.

http://fajarbax89.blogspot.com/2009/10/sejarah-penggunan-markov-chain.html

http://dhedee29.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/50573/analisis+markov.pdf