

Modul Kuliah ke 1
TPK

Probabilitas

Kompetensi:

Setelah membaca modul kuliah ini, diharapkan mahasiswa mampu:

1. Memahami konsep probabilitas.
2. Memahami metode probabilitas.
3. Mencari hasil probabilitas pada suatu kasus

I. Konsep Probabilitas

Keputusan bisnis seringkali didasarkan pada analisis ketidakpastian seperti berikut ini:

1. Apa "peluang" penjualan akan menurun jika kita menaikkan harga?
2. Apa "kemungkinan" apabila menggunakan metode perakitan baru akan dapat meningkatkan produktivitas?
3. Seberapa "mungkin" proyek akan selesai tepat waktu?
4. Apa "peluang" bahwa investasi baru akan menguntungkan?

Probabilitas adalah ukuran numerik dari kemungkinan terjadinya suatu peristiwa. Dengan demikian, probabilitas dapat digunakan sebagai ukuran tingkat ketidakpastian yang terkait dengan empat event seperti contoh yang terdaftar di atas. Jika probabilitas dapat ditentukan, maka kami dapat menentukan kemungkinannya dari setiap peristiwa yang terjadi.

Nilai probabilitas ditetapkan pada skala dari 0 hingga 1:

- Probabilitas mendekati 0 mengindikasikan suatu peristiwa sangat kecil kemungkinannya untuk terjadi.
- Probabilitas mendekati 1 mengindikasikan suatu peristiwa sangat besar kemungkinannya untuk terjadi.
- Probabilitas 0.5 mengindikasikan kemungkinan untuk terjadi atau tidaknya suatu peristiwa adalah sama

Probabilitas sangat penting dalam pengambilan keputusan karena dapat memberikan cara untuk mengukur, mengekspresikan, dan menganalisis ketidakpastian yang terkait dengan peristiwa yang akan terjadi di masa depan.



Istilah yang terkait dengan probabilitas diantaranya:

- Eksperimen adalah suatu proses yang mengakibatkan *outcome* yang dapat terdefinisi dengan baik..
- Ruang sampel (*sample space*) dari suatu eksperimen adalah kumpulan dari seluruh *outcome* dari suatu eksperimen.
- Titik sampel (*sample point*) adalah elemen dari *sample space*, yaitu salah satu dari *outcomes* eksperimen.

Contoh eksperimen dan outcomes seperti berikut:

Eksperimen	Outcomes atau Sample space
Melempar koin	Angka dan gambar
Pemeriksaan sparepart	Baik dan cacat
Melempar dadu	1,2,3,4,5,6
Bertanding sepakbola	Menang, kalah, seri

Contoh titik sample misalnya dalam eksperimen melempar dadu, maka hasil yang keluar atau titik sampelnya adalah 4 yang muncul.

II. Menentukan Probabilitas Pada Hasil Eksperimental

Dengan pemahaman tentang percobaan/ eksperimen dan ruang sampel, mari kita lihat bagaimana probabilitas hasil dari eksperimen dapat ditentukan. Probabilitas hasil eksperimen adalah ukuran numerik dari kemungkinan hasil eksperimen itu terjadi pada satu pengulangan percobaan. Dalam menetapkan probabilitas hasil eksperimental, dua persyaratan dasar probabilitas harus dipenuhi yaitu :

1. Nilai probabilitas yang ditetapkan untuk setiap hasil eksperimen (titik sampel) harus berada di antara 0 dan 1. Jika kita mendefinisikan E_i menunjukkan hasil eksperimental dan $P(E_i)$ menunjukkan probabilitas hasil eksperimen ini, maka dapat kita tuliskan :

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \quad (\text{untuk semua nilai } i)$$

2. Jumlah semua probabilitas hasil dari eksperimental totalnya harus 1. Sebagai contoh, jika a ruang sampel memiliki hasil eksperimen k, maka dapat kita tuliskan bahwa :

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_i) = 1$$

Metode yang dapat menetapkan nilai probabilitas pada hasil eksperimen yang memenuhi dua persyaratan tersebut untuk menghasilkan ukuran numerik dari kemungkinan hasil yang dapat diterima yaitu metode klasik, metode frekuensi relatif, dan metode subjektif.

1. Metode Klasik

Penentuan probabilitas berdasarkan asumsi bahwa setiap outcome memiliki kemungkinan terjadi yang sama. Jika suatu eksperimen memiliki n kemungkinan outcomes, maka berdasarkan metode ini setiap outcome akan memiliki probabilitas sebesar $1/n$.

Contoh :

- a. Eksperimen : melempar koin

Sample Space : $S = \{\text{gambar, angka}\}$
 Probabilitas : Tiap sample point memiliki kemungkinan terjadi sebesar $1/2$

b. Eksperimen : melempar dadu
 Sample Space : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 Probabilitas : Tiap sample point memiliki kemungkinan terjadi sebesar $1/6$

2. Metode frekuensi relatif

Penentuan probabilitas berdasarkan data eksperimental atau historis

Contoh:

Suatu perusahaan rental mobil sedang mengamati data jumlah mobil yang disewa oleh pelanggan tiap harinya selama 40 hari terakhir. Berdasarkan data tersebut dapat dihitung probabilitas jumlah mobil yang disewa pada suatu hari melalui metode frekuensi relatif.

Jumlah Mobil Tersewa	Jumlah Hari	Probabilitas
0	4	$4/40 = 0,10$
1	6	$6/40 = 0,15$
2	18	$18/40 = 0,45$
3	10	$10/40 = 0,25$
4	2	$2/40 = 0,05$
Jumlah	40	1

3. Metode subjektif

Penentuan probabilitas berdasarkan judgment peneliti. Metode subyektif dalam menetapkan probabilitas paling tepat ketika kita tidak dapat secara realistis berasumsi bahwa hasil eksperimen yang tersedia hanya sedikit data yang relevan. Metode subjektif digunakan dalam menetapkan hasil percobaan probabilitas dengan semua informasi baik yang didapatkan dari pengalaman atau intuisi. Setelah mempertimbangkan semua informasi yang tersedia, nilai probabilitas yang menyatakan tingkat kepercayaan (pada skala dari 0 hingga 1) bahwa hasil eksperimen yang akan terjadi dapat ditentukan. Karena probabilitas subyektif mengungkapkan tingkat kepercayaan seseorang, itu bersifat pribadi. Menggunakan metode subjektif pada orang yang berbeda dapat menetapkan probabilitas yang berbeda juga pada hasil percobaan yang sama.

Contoh :

Kasus pertimbangan oleh Tom dan Judy Elsbernd yang baru saja mengajukan penawaran untuk membeli sebuah rumah. Ada dua hasil yang mungkin yaitu:

E_1 = Tawaran mereka disetujui

E_2 = Tawaran mereka ditolak

Judy percaya bahwa probabilitas tawarannya akan diterima adalah 0,8; dengan demikian, Judy akan menentukan $P(E_1) = 0,8$ dan $P(E_2) = 0,2$. Namun, Tom percaya bahwa kemungkinan penawarannya yang akan diterima adalah 0,6; karenanya, Tom akan menetapkan $P(E_1) = 0,6$ dan $P(E_2) = 0,4$.

Baik Judy dan Tom memberikan probabilitas yang memenuhi dua persyaratan dasar. Itu memperlihatkan bahwa estimasi probabilitas mereka berbeda mencerminkan sifat pribadi dalam menentukan metode subjektif.

Dalam probabilitas ada istilah *Event* yang didefinisikan sebagai sekumpulan dari *sample point*. Probabilitas dari suatu *event* sama dengan jumlah probabilitas dari seluruh *sample point* dalam *event* tersebut. Jika seluruh *sample points* dari suatu eksperimen dapat diidentifikasi dan ditentukan probabilitasnya, maka probabilitas dari *event* dapat diperhitungkan.

Misalnya dalam percobaan melempar dadu, maka ruang sampel percobaan tersebut memiliki enam titik sampel dan dilambangkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sekarang perhatikan kejadian yang menunjukkan jumlah titik atas dadu adalah angka genap. Tiga titik sampel dalam acara ini adalah 2, 4, dan 6. Menggunakan huruf A untuk menunjukkan acara ini, kami menulis A sebagai kumpulan titik sampel.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Dari kasus tersebut kita dapat mencari berapa probabilitas dari angka genap yang muncul pada pelemparan dadu. Caranya kita dapat menjumlahkan probabilitas dari masing-masing titik sampelnya seperti berikut:

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$$

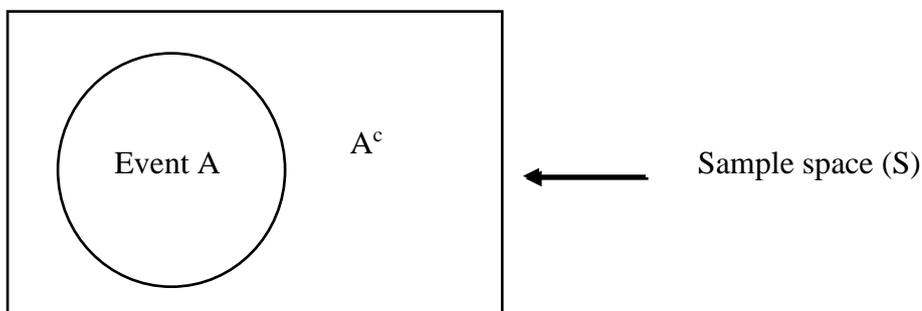
$$P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2$$

III. Hubungan Probabilitas

Ada beberapa hubungan dasar probabilitas yang dapat digunakan untuk menghitung probabilitas *event* tanpa perlu mengetahui probabilitas dari *sample point*, yaitu: Komplemen dari suatu *event*, Gabungan dua *event*, Irisan dua *event*, *Event* yang saling lepas (*Mutually Exclusive*).

a. Komplemen dari suatu *event*

- Komplemen dari *event A* didefinisikan sebagai suatu *event* yang terdiri atas seluruh *sample point* yang bukan bagian dari A .
- Komplemen A dinotasikan sebagai A^c .
- Diagram Venn berikut menggambarkan konsep komplemen.

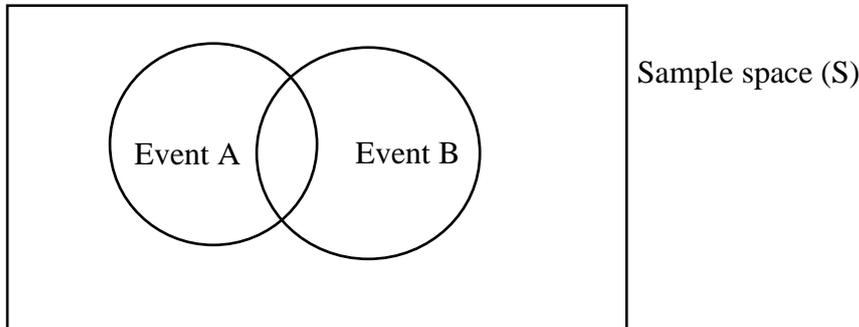


- Perhitungan probabilitas komplemen :

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

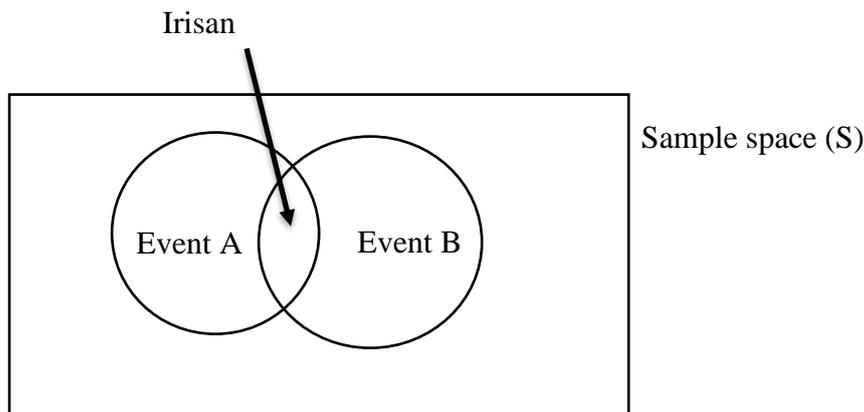
b. Gabungan dua event

- Gabungan event A dan B adalah suatu event yang terdiri atas seluruh sampel point yang merupakan bagian dari A atau B atau keduanya.
- Gabungan tersebut dinotasikan sebagai $A \cup B$.
- Gabungan A dan B digambarkan sebagai berikut:



c. Irisan dua event

- Irisan event A dan B adalah kumpulan sample points yang merupakan bagian dari A dan B.
- Irisan dinotasikan sebagai $A \cap B$.



- Hukum penjumlahan (addition law) memungkinkan perhitungan probabilitas terjadinya event A, atau B, atau keduanya.
- Hukum penjumlahan dituliskan sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Contoh 1

Pada suatu evaluasi hasil kerja bulanan terhadap 50 orang pekerja, seorang manajer mendapatkan informasi bahwa 5 orang pekerjanya tidak menyelesaikan pekerjaan dengan tepat waktu, 6 orang menghasilkan produk gagal, dan 2 orang tidak tepat waktu dan menghasilkan produk gagal. Berapakah probabilita menemukan pekerja tidak bermasalah?

Jawaban

Misalkan

A = Pekerjaan tidak tepat waktu

B = Terjadinya produk gagal

$$P(A) = 5/50 = 0,1$$

$$P(B) = 6/50 = 0,12$$

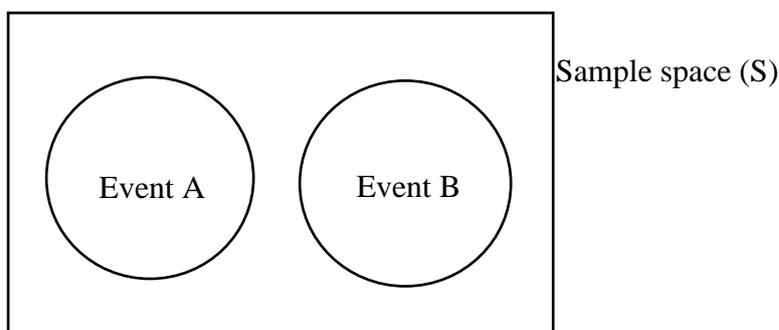
$$P(A \cap B) = 2/50 = 0,04$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = 0,1 + 0,12 - 0,04 = 0,18$$

$$P(A \cup B)^c = 0,82$$

d. Event yang saling lepas (Mutually Exclusive)

- Dua events dikatakan mutually exclusive jika tidak terdapat sample point yang merupakan bagian dari keduanya.



- Hukum penjumlahan pada Mutually Exclusive Events

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

e. Probabilitas Kondisional

- Probabilitas event dengan syarat tertentu atau pada kondisi suatu event lain terjadi disebut *conditional probability*.
- Probabilitas kondisional A dengan syarat B terjadi dinotasikan sebagai $P(A|B)$.
- Perhitungan probabilitas kondisional dirumuskan sebagai:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Contoh 2

Pada tabel di bawah ini adalah data karyawan pria dan wanita yang naik pangkat dan yang tidak naik pangkat. Tampilan tabelnya adalah sebagai berikut:

	Naik Pangkat (B)	Tidak Naik Pangkat (B ^c)	Total
Pria (M)	288	672	960
Wanita (W)	36	204	240
Total	324	876	1200

$$P(M \cap B) = \frac{288}{1200} = 0,24$$

$$P(M \cap B^c) = \frac{672}{1200} = 0,56$$

$$P(W \cap B) = \frac{36}{1200} = 0,03$$

$$P(W \cap B^c) = \frac{204}{1200} = 0,17$$

$$P(B) = \frac{324}{1200} = 0,27$$

$$P(B^c) = \frac{876}{1200} = 0,73$$

$$P(M) = \frac{960}{1200} = 0,8$$

$$P(W) = \frac{240}{1200} = 0,2$$

Tabel hasil perhitungan probabilitasnya adalah sebagai berikut:

	Naik Pangkat (B)	Tidak Naik Pangkat (B ^c)	Total
Pria (M)	0,24	0,56	0,80
Wanita (W)	0,03	0,17	0,20
Total	0,27	0,73	1,00

Dari tabel tersebut, kita dapat mencari probabilitas kondisionalnya sebagai berikut:

$$P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0,24}{0,80} = 0,30$$

$$P(B|W) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{0,03}{0,20} = 0,15$$

$$P(B^c|M) = \frac{P(B^c \cap M)}{P(M)} = \frac{0,56}{0,80} = 0,7$$

$$P(B^c|W) = \frac{P(B^c \cap W)}{P(W)} = \frac{0,17}{0,20} = 0,85$$

$$P(M|B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{0.24}{0.27} = 0,89$$

$$P(W|B) = \frac{P(W \cap B)}{P(B)} = \frac{0.03}{0.27} = 0,11$$

$$P(M|B^c) = \frac{P(M \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.56}{0.73} = 0,77$$

$$P(W|B^c) = \frac{P(W \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0.17}{0.73} = 0,23$$

f. Hukum Perkalian

- Hukum perkalian (*multiplication law*) memungkinkan perhitungan probabilitas irisan dari dua event.
- Rumusnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

- Pada event independent maka apabila event A dan B independent maka $P(A|B) = P(A)$, berdasarkan kondisi tersebut hukum perkalian untuk event yang independent dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

Dengan rumus di atas kita dapat menguji apakah dari dua event itu beririsan atau saling berlepasan (independen).

Contoh 3

Dari contoh 2 di atas kita akan menguji apakah event naik pangkat dan pria dapat dikatakan independen?

Jawaban

Untuk menguji kasus tersebut kita dapat melakukan dengan 2 cara yaitu:

1. Cek apakah : $P(M|B) = P(M)$
 $0,89 \neq 0,80$

2. Cek dengan hukum perkalian

$$P(M \cap B) = P(M)P(B)$$

$$0,24 = (0,80) (0,27)$$

$$0,24 \neq 0,216$$

Kesimpulannya event naik pangkat dan pria adalah tidak independen

Daftar Pustaka

Quantitative Methods for Business, Twelfth Edition, Anderson, Sweeney, Williams, Camm, Cochran, Fry, Ohlmann, 2013, Cengage Learning.